

# Multiplikative Markovketten mit Resetereignissen

von

Sonja Greven

Diplomarbeit in Mathematik  
vorgelegt der

**FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK UND  
NATURWISSENSCHAFTEN**  
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im Juli 2004

angefertigt am

Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik  
Priv.-Doz. Dr. Lorens Imhof

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das Modell als homogene Markovkette mit diskretem Zustandsraum</b>	<b>3</b>
2.1	Grundlagen homogener Markovketten mit diskretem Zustandsraum . . . . .	3
2.2	Konstanter multiplikativer Faktor und Reset auf konstanten Level	12
2.3	Multiplikativer Faktor als Zufallsvariable und Reset auf konstanten Level . . . . .	16
2.3.1	Powerlaw-Verteilung für den multiplikativen Faktor . . . . .	17
2.3.2	Bedingungen für ein asymptotisches Powerlaw . . . . .	19
2.3.3	Verteilung des multiplikativen Faktors auf zwei Werten . . . . .	23
2.3.4	Untersuchung auf Powerlaw-äquivalentes Verhalten . . . . .	25
2.3.5	Verteilung des multiplikativen Faktors auf $N$ Werten . . . . .	27
2.4	Konstanter multiplikativer Faktor und Resetlevel als Zufallsvariable . . . . .	29
2.4.1	Verteilung des Resetlevels auf $N$ Werten . . . . .	30
2.4.2	Verteilung des Resetlevels auf $S$ . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Das Modell als homogene Markovkette mit stetigem Zustandsraum</b>	<b>37</b>
3.1	Grundlagen homogener Markovketten mit stetigem Zustandsraum	37
3.2	Definition der Markovkette und des Übergangskerns . . . . .	48
3.3	Grundlegende Eigenschaften der Markovkette . . . . .	51
3.3.1	Irreduzibilität . . . . .	51
3.3.2	Zugängliches Atom und kleine Menge . . . . .	52
3.3.3	Starke Aperiodizität . . . . .	53
3.3.4	Rekurrenz und Harris-Rekurrenz . . . . .	53
3.3.5	Positive Harris-Kette und invariantes Maß . . . . .	56
3.3.6	T-Kette und topologische Gutartigkeit . . . . .	57
3.4	Ergodizität und Konvergenz . . . . .	58
3.5	Ein Vergleich mit additiven Modellen . . . . .	60
3.6	Gleichverteilung für den Übergangskern . . . . .	64
3.7	Exponentialverteilung für den Übergangskern . . . . .	84

<b>4</b>	<b>Simulation des untersuchten Modells</b>	<b>94</b>
4.1	Fall 2.2 . . . . .	94
4.2	Fall 2.3.3 . . . . .	95
4.3	Fall 2.4.1 . . . . .	95
4.4	Fall 3.6 . . . . .	96
4.5	Fall 3.7 . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>Mehrdimensionale vollständige Induktion</b>	<b>106</b>
<b>B</b>	<b>Quellcode für die Simulation</b>	<b>111</b>
<b>C</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>117</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>120</b>

# 1 Einleitung

Diese Arbeit befaßt sich mit multiplikativen Markovketten mit Resetereignissen. Ausgangspunkt ist ein Artikel von Manrubia und Zanette, [9], in dem stochastische multiplikative Prozesse mit Resetereignissen untersucht werden. Sie führen einen solchen zeitdiskreten stochastischen Prozeß  $n(t)$  über

$$n(t+1) = \begin{cases} n_0(t+1) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q, \\ \mu(t)n(t) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - q \end{cases} \quad (1.1)$$

ein. Dabei soll  $q \in (0, 1)$  die Wahrscheinlichkeit eines Resets (Zurücksetzens) auf einen zufälligen Wert  $n_0$  sein, der die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_0(n_0)$  hat. Falls ein solches Zurücksetzen nicht eintritt, steht  $\mu$  für einen zufälligen positiven Faktor mit Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(\mu)$ .

Solche Prozesse könnten Wachstumsprozesse verschiedenster Art beschreiben, bei denen es mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit immer wieder zu katastrophalen Rückschlags- oder Todesereignissen kommt, die die bis dahin gewachsene „Population“ auf einen niedrigeren Wert zurückwerfen.

Manrubia und Zanette gehen in ihrem Artikel zunächst von dem einfachsten Fall mit konstantem  $n_0$  und  $\mu$  aus, um danach analytisch und numerisch das allgemeinere Modell zu untersuchen. Sie setzen dabei Konvergenz des Prozesses gegen eine asymptotische stationäre Verteilung voraus und stellen die These auf, daß der Prozeß außerhalb der Region möglicher Rückschlagswerte  $n_0$  gegen ein sogenanntes Powerlaw konvergiert. Sie untermauern diese Behauptung mit einigen theoretischen Betrachtungen und numerischen Simulationen.

Ein Powerlaw ist dabei eine Funktion der Gestalt  $f(n) = An^{-\alpha}$ . Im obigen Fall würde  $f(n)$  die Dichte der asymptotischen Verteilung darstellen (die dann ebenfalls Powerlaw genannt wird), so daß  $A$  eine Normierungskonstante wäre. Die Konstante  $\alpha$  wäre damit der bestimmende Parameter der Verteilung. Er hängt laut Manrubia und Zanette nur von  $q$  und der Verteilung  $P(\mu)$  ab, nicht jedoch von  $P_0(n_0)$ . Der Bereich, in dem asymptotisch das Powerlaw gelten soll, wird hingegen von  $P_0(n_0)$  bestimmt. Sie setzen voraus, daß  $P_0(n_0)$  nur innerhalb eines beschränkten Gebietes „nennenswert“ von 0 verschieden ist und postulieren das asymptotische Powerlaw nur für den Bereich außerhalb dieses Gebietes.

Es ist nun zunächst festzustellen, daß die beschriebenen Prozesse die Gedächtnislosigkeit aufweisen, die typisch für Markovketten ist. Der Zustand des beschriebenen Systems zum Zeitpunkt  $t + 1$  hängt stets nur vom Zustand zum

Zeitpunkt  $t$  ab, nicht jedoch von früheren Zuständen. Außerdem sind  $P_0(n_0)$  und  $P(\mu)$ , die die Übergangswahrscheinlichkeiten neben dem konstanten  $q$  bestimmen, unabhängig von  $t$ , so daß die betrachtete Markovkette sogar homogen ist. Es ist also zu vermuten, daß die Methodik homogener Markovketten zu einer Untersuchung dieser Prozesse und ihres asymptotischen Verhaltens beitragen kann.

Diese Arbeit stellt zunächst die dazu benötigten Resultate im Bereich homogener Markovketten mit diskretem (Kapitel 2) und stetigem Zustandsraum (Kapitel 3) vor. Anschließend wird das oben vorgestellte Modell zunächst jeweils als Markovkette eingeführt und die Konvergenz ihrer Verteilung gegen ein asymptotisches invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß allgemein nachgewiesen. Anhand verschiedener spezieller Modelle wird das Verhalten solcher Markovketten untersucht und auch geprüft, wann die Verteilung der beschriebenen Markovkette tatsächlich gegen das postulierte Powerlaw konvergiert bzw. asymptotisch ein Powerlaw-ähnliches Verhalten aufweist. Es wird außerdem ein möglicher Zusammenhang zwischen den beschriebenen multiplikativen Markovketten und additiven Markovketten wie den Random Walks untersucht.

## 2 Das Modell als homogene Markovkette mit diskretem Zustandsraum

In diesem Kapitel werden stochastische Prozesse der Form (1.1) mit diskretem Zustandsraum formal als Markovketten eingeführt und untersucht. Zunächst sind die dazu benötigten Grundlagen in Abschnitt 2.1 zusammengestellt. Danach wird in Abschnitt 2.2 der einfachste Fall eines konstanten Resetlevels  $n_0$  und eines konstanten multiplikativen Faktors  $\mu$  vorgestellt. Anschließend wird das Modell in den Abschnitten 2.3 und 2.4 verallgemeinert, in dem  $\mu$  bzw.  $n_0$  als Zufallsvariable betrachtet werden.

### 2.1 Grundlagen homogener Markovketten mit diskretem Zustandsraum

In den folgenden Untersuchungen werden einige Grundlagen für homogene Markovketten mit diskretem Zustandsraum benötigt. Die in diesem Abschnitt zusammengestellten Resultate finden sich weitestgehend (Definition 2.1 bis Satz 2.16) in ähnlicher Form in den Kapiteln 15 bis 17 von Krengel, [8].

**Definition 2.1** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(S, \mathcal{J})$  ein meßbarer Raum mit  $S$  abzählbar und  $\mathcal{J}$  die Potenzmenge von  $S$ . Eine Familie  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  von Zufallsvariablen mit Werten in  $S$ , (d.h.  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  ein stochastischer Prozeß mit Parameterbereich  $\mathbb{N}_0$  und Zustandsraum  $S$ ), heißt **Markovkette**, wenn sie die folgende Markovsche Eigenschaft besitzt:

Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und für alle  $i_0, \dots, i_{n+1} \in S$  mit

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0 \quad \text{ist}$$
$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

$X_n$  ist dabei als Zustand eines Systems zum Zeitpunkt  $n$  interpretierbar. Die Markovsche Eigenschaft bedeutet eine gewisse „Gedächtnislosigkeit“ des Systems, d.h. die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit  $n + 1$  in einen beliebigen Zustand zu gelangen, hängt nur von  $n$  und vom Zustand zur Zeit  $n$  ab, nicht jedoch von früheren Zuständen des Systems.

Es folgen zwei Folgerungen aus der markovschen Eigenschaft, die im Umgang mit Markovketten häufig benötigt werden. (Für die einfachen Beweise siehe Sätze 15.5 und 15.6 aus Krenzel, [8].)

**Satz 2.2** Sei  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Markovkette.

(i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $i_0, \dots, i_n \in S$  gilt

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ = P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

(ii) Sei  $0 < n < N$ . Für alle  $i_n \in S$  und alle Teilmengen  $E \subset S^n, F \subset S^{N-n}$  gilt

$$\begin{aligned} P((X_{n+1}, \dots, X_N) \in F | X_n = i_n, (X_0, \dots, X_{n-1}) \in E) \\ = P((X_{n+1}, \dots, X_N) \in F | X_n = i_n). \end{aligned}$$

**Satz 2.3** (Chapman-Kolmogorov-Gleichung)

Ist  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Markovkette und  $k < m < n$ , so gilt für alle  $h, j \in S$

$$P(X_n = j | X_k = h) = \sum_{i \in S} P(X_m = i | X_k = h)P(X_n = j | X_m = i).$$

Bei homogenen Markovketten sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zusätzlich unabhängig vom Zeitpunkt  $n$ :

**Definition 2.4** Eine Markovkette heißt **homogen** oder Kette mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn für alle  $i, j \in S$

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) =: p_{ij}$$

unabhängig von  $n$  ist.

$\mathbf{P} = (p_{ij})$  ist dann eine stochastische Matrix, d.h. es gilt

$$p_{ij} \geq 0 \quad (i, j \in S) \quad \text{und} \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \quad (i \in S).$$

Ferner sei  $P_i$  das Wahrscheinlichkeitsmaß, das die Verteilung des Prozesses beschreibt, wenn man in  $i$  startet, also

$$P_i(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \stackrel{2.2(i)}{=} \delta_{ii_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n},$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kroneckersymbol ist.  $E_i$  bezeichne den zu  $P_i$  gehörigen Erwartungswert.

Weitere Notation:  $p_{ij}^{(m)} := P(X_{n+m} = j | X_n = i)$  bezeichne die  $m$ -Schritt Übergangswahrscheinlichkeit von  $i$  nach  $j$ . Die Unabhängigkeit von  $n$  ist dabei

für  $m = 1$  die Definition der Homogenität und folgt für  $m \geq 2$  induktiv aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$P(X_{n+m} = j | X_n = i) = \sum_{h \in S} P(X_{n+m} = j | X_{n+m-1} = h) P(X_{n+m-1} = h | X_n = i).$$

Dies läßt sich nun in der Form

$$p_{hj}^{(t+s)} = \sum_i p_{hi}^{(t)} p_{ij}^{(s)} \quad (2.1)$$

schreiben. Hieraus folgt durch Induktion, daß die Matrix  $(p_{ij}^{(m)})$  gerade die  $m$ -te Potenz  $\mathbf{P}^m$  der Matrix  $\mathbf{P} = (p_{ij})$  ist.

Im weiteren werden nur homogene Markovketten betrachtet.

Es folgen nun einige Definitionen und Sätze zu grundlegenden Eigenschaften homogener Markovketten - Rekurrenz, kommunizierende Zustände und Aperiodizität. Den Abschluß dieses Abschnittes 2.1 bildet ein Konvergenzsatz, der für die Betrachtung des Langzeitverhaltens von Markovketten zentral ist.

**Definition 2.5** Ein Zustand  $i$  heißt **rekurrent**, wenn  $P_i(X_n = i \text{ } \infty \text{ oft}) = 1$  gilt. Andernfalls heißt  $i$  **transient**. Eine Markovkette heißt rekurrent (transient), wenn jeder Zustand rekurrent (transient) ist.

Ein Zustand  $i$  heißt **positiv rekurrent**, wenn  $\limsup p_{ii}^{(n)} > 0$  ist, und **Nullzustand** sonst. Eine Markovkette heißt positiv rekurrent, wenn alle Zustände positiv rekurrent sind.

Es werden noch einige Bezeichnungen benötigt.

Sei für  $n \geq 1$  und Zustände  $i, j \in S$

$f_{ij}^{(n)} := P_i(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j)$  die Wahrscheinlichkeit, bei Start in  $i$  den Zustand  $j$  zum ersten Mal zum Zeitpunkt  $n$  zu besuchen [ $f_{ij}^{(0)} := 0$ ],

$f_{ij}^* := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$  die Wahrscheinlichkeit, bei Start in  $i$  je nach  $j$  zu gelangen,

$B_j := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}$  die Zahl der Besuche in  $j$  zu Zeitpunkten  $n \geq 1$ , und

$p_{ij}^* := \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} E_i[\mathbf{1}_{\{X_n=j\}}] = E_i[B_j]$  die erwartete Zahl der Besuche in  $j$  bei Start in  $i$ .

Es folgt zunächst eine Hilfsaussage:

**Lemma 2.6** Es gilt  $P_i(B_i \geq m) = (f_{ii}^*)^m \quad (m \geq 1)$ .

**Beweis** durch vollständige Induktion:

Sei  $\tau_1(\omega) := \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) = i\}$  und  $\tau_{m+1}(\omega) := \inf\{n > \tau_m(\omega) : X_n(\omega) = i\}$ . Dabei sei, wie üblich,  $\inf(\emptyset) = \infty$ . Sei ferner  $A_{mn}$  die Menge der Folgen

$(i_0, \dots, i_{n-1}) \in S^n$ , für die  $i_0 = i$  gilt und genau  $m - 1$  weitere der Koordinaten  $= i$  sind und definiere  $D_n^{n+k} := \{X_{n+1} \neq i, \dots, X_{n+k-1} \neq i, X_{n+k} = i\}$ . Offenbar ist  $\{B_i \geq m\} = \{\tau_m < \infty\}$ . Dann ist, da  $f_{ii}^*$  die Rückkehrwahrscheinlichkeit nach  $i$  ist, für  $m = 1$   $P_i(\tau_m < \infty) = (f_{ii}^*)^m$ , und falls die Gleichung für  $m$  gilt, so folgt für  $m + 1$ :

$$\begin{aligned}
P_i(\tau_{m+1} < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(\tau_{m+1} - \tau_m = k, \tau_m = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(\tau_{m+1} - \tau_m = k \mid \tau_m = n) P_i(\tau_m = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(D_n^{n+k} \mid X_n = i, (X_0, \dots, X_{n-1}) \in A_{mn}) P_i(\tau_m = n) \\
&\stackrel{2.2(ii)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(D_n^{n+k} \mid X_n = i) P_i(\tau_m = n) \\
&\stackrel{hom.}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(D_0^k \mid X_0 = i) P_i(\tau_m = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} P_i(\tau_m < \infty) \stackrel{IV}{=} f_{ii}^* (f_{ii}^*)^m = (f_{ii}^*)^{m+1}
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung mit vollständiger Induktion.  $\square$

**Satz 2.7** (Rekurrenzsatz) *Ein Zustand  $i$  ist genau dann rekurrent, wenn  $f_{ii}^* = 1$  ist. Notwendig und hinreichend hierfür ist  $p_{ii}^* = \infty$ .*

**Beweis:** Offensichtlich ist  $\{B_i = \infty\} = \{X_n = i \text{ } \infty \text{ oft}\}$ .

Gilt  $f_{ii}^* = 1$ , so ist nach Lemma 2.6  $P_i(B_i \geq m) = 1$  für alle  $m$  und daher  $P_i(B_i = \infty) = 1$ . Damit ist auch  $p_{ii}^* = E_i[B_i] = \infty$ .

Gilt  $f_{ii}^* < 1$ , so ist nach der geometrischen Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_i(B_i \geq m) = \sum_{m=1}^{\infty} (f_{ii}^*)^m = \frac{f_{ii}^*}{1 - f_{ii}^*} < \infty.$$

Dann folgt mit dem Cauchy-Kriterium für Reihen  $P_i(B_i = \infty) = 0$ . Weiterhin gilt

$$p_{ii}^* = E_i[B_i] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_i(B_i = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^k P_i(B_i = k) = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(B_i \geq m) < \infty. \square$$

**Folgerung 2.8** *Ein positiv rekurrenter Zustand ist auch rekurrent. Eine positiv rekurrente Markovkette ist auch rekurrent.*

**Beweis:** Ist  $i \in S$  positiv rekurrent, so ist nach Definition  $\limsup p_{ii}^{(n)} > 0$ . Damit ist  $p_{ii}^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ . Mit Satz 2.7 folgt:  $i$  ist rekurrent. Die Aussage für Markovketten folgt sofort.  $\square$

**Definition 2.9** Es gilt  $i \rightsquigarrow j [n]$ , d.h. der Zustand  $i$  **führt in  $n$  Schritten** zum Zustand  $j$ , wenn  $p_{ij}^{(n)} > 0$  gilt. Gibt es ein  $n \geq 1$  mit  $i \rightsquigarrow j [n]$ , so **führt  $i$  zu  $j$** , kurz  $i \rightsquigarrow j$ .  $i$  **kommuniziert** mit  $j$ , wenn  $i \rightsquigarrow j$  und  $j \rightsquigarrow i$ .

**Satz 2.10**

- (i) Alle mit einem rekurrenten Zustand kommunizierenden Zustände sind rekurrent.
- (ii) Ist  $i$  rekurrent, so gilt für alle  $j$  mit  $i \rightsquigarrow j$ :  $f_{ji}^* = 1$ .

**Beweis:** (i) Gilt  $p_{ij}^{(m)} > 0$  und  $p_{ji}^{(k)} > 0$ , so folgt aus  $p_{ii}^* = \infty$  und  $p_{jj}^{(k+n+m)} \stackrel{(2.1)}{=} \sum_{s \in S} \sum_{t \in S} p_{js}^{(k)} p_{st}^{(n)} p_{tj}^{(m)} \geq p_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(m)}$  durch Summation

$$\begin{aligned} p_{jj}^* &= \sum_{l=1}^{\infty} p_{jj}^{(l)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(k+n+m)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(m)} = p_{ji}^{(k)} p_{ij}^{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \\ &= p_{ji}^{(k)} p_{ij}^{(m)} p_{ii}^* = \infty, \end{aligned}$$

also die Rekurrenz von  $j$ .

(ii) Wegen  $i \rightsquigarrow j$  existiert ein  $m$  mit  $p_{ij}^{(m)} > 0$ . Da  $i$  rekurrent ist, ist

$$\begin{aligned} 1 &= P_i(\exists n > m : X_n = i) = \sum_{k \in S} P_i(\exists n > m : X_n = i, X_m = k) \\ &= \sum_{k \in S} P_i(X_m = k) P_i(\exists n > m : X_n = i | X_m = k) \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} P_k(\exists n > 0 : X_n = i) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} f_{ki}^* \end{aligned}$$

Wäre  $f_{ji}^* < 1$ , so wäre die letzte Summe  $< 1$ .  $\square$

**Definition 2.11** Für einen Zustand  $i$  mit  $i \rightsquigarrow i$  heißt der größte gemeinsame Teiler der potentiellen Rückkehrzeiten  $d_i = \text{ggT} \{n \geq 1 : i \rightsquigarrow i [n]\}$  die **Periode** von  $i$ . Gilt nicht  $i \rightsquigarrow i$ , so sei  $d_i = \infty$ . Zustände mit  $d_i = 1$  heißen **aperiodisch**. Die Kette heißt **aperiodisch**, wenn alle Zustände aperiodisch sind, und **periodisch** mit Periode  $d$ , wenn alle  $d_i = d \geq 2$  sind.

**Satz 2.12** Kommuniziert  $i$  mit  $j$ , so ist  $d_i = d_j$ .

**Beweis:** Gilt  $j \rightsquigarrow j [n]$  und sind  $k, m$  Zeitpunkte mit  $i \rightsquigarrow j [k]$  und  $j \rightsquigarrow i [m]$ , so gilt  $i \rightsquigarrow i [k+m]$  und  $i \rightsquigarrow i [k+m+n]$ .  $d_i$  teilt also  $k+m$  und  $k+m+n$  und also auch  $n$ .  $d_i$  ist also gemeinsamer Teiler aller  $n$  mit  $j \rightsquigarrow j [n]$ . Es folgt  $d_i \leq d_j$ . Aus Symmetriegründen muß auch  $d_j \leq d_i$  gelten.  $\square$

**Satz 2.13** *Für homogene Markovketten gilt*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} \quad (n \geq 1) \quad \forall i, j \in S.$$

**Beweis:** Seien  $i, j \in S$ ,  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{m=1}^n P_i(X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j, X_n = j) \\ &\stackrel{p_{jj}^{(0)}=1}{=} \sum_{m=1}^n P_i(X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j) P_i(X_n = j \mid X_m = j) \\ &\stackrel{\text{hom.MK}}{=} \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}. \end{aligned}$$

$\square$

Das folgende zahlentheoretische Lemma (ohne Beweis) wird für den anschließenden Erneuerungssatz benötigt.

**Lemma 2.14** *Ist  $d$  der größte gemeinsame Teiler von Zahlen  $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}_0$ , so gibt es Zahlen  $K$  und  $L$  derart, daß sich jedes Produkt  $ld$  mit  $l \geq L$  als Summe der Form*

$$ld = \sum_{k=1}^K c_k n_k \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{N}$$

*schreiben läßt.*

**Satz 2.15** (Erneuerungssatz) *Sei  $(f_m)_{m \geq 1}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{N}$  und  $(u_n)_{n \geq 0}$  gegeben durch die Erneuerungsgleichung*

$$u_n = \sum_{m=1}^n f_m u_{n-m} \quad (n \geq 1), \quad u_0 = 1. \quad (2.2)$$

*Sei  $\mu = \sum_{m=1}^{\infty} m f_m$  die Erwartung der Verteilung  $(f_m)$ . Ist  $d_u = \text{ggT}\{n \geq 1 : u_n > 0\} = 1$ , so konvergiert  $(u_n)$  gegen  $1/\mu$ . (Dabei sei wie üblich  $\frac{1}{\infty} = 0$ .)*

**Beweis:** (1) Nach Voraussetzung ist  $u_0 = 1$  und somit  $0 \leq u_0 \leq 1$ . Gilt  $0 \leq u_j \leq 1 \forall j < n$ , so folgt  $0 \leq u_n = \sum_{m=1}^n f_m u_{n-m} \leq \sum_{m=1}^n f_m \leq \sum_{m=1}^{\infty} f_m = 1$ . Mit vollständiger Induktion folgt:  $0 \leq u_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}_0$ .  
(2) Nach (1) existiert  $\limsup u_n =: \lambda \in [0, 1]$ . Sei  $(n_k)$  eine Folge mit  $n_k \rightarrow \infty$  und  $u_{n_k} \rightarrow \lambda$ . Für alle  $m \geq 1$  gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda &= \liminf_{k \rightarrow \infty} (f_m u_{n_k - m}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k} - f_m u_{n_k - m}) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{s=1}^{n_k} f_s u_{n_k - s} - f_m u_{n_k - m} \right) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{s=1, s \neq m}^{n_k} f_s u_{n_k - s} \right) \\ \Rightarrow \lambda &= \liminf_{k \rightarrow \infty} (f_m u_{n_k - m}) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{s=1, s \neq m}^{n_k} f_s u_{n_k - s} \right) \\ &\leq f_m \liminf_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k - m}) + \sum_{s \neq m} f_s \limsup_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k - s}) \\ &\leq f_m \liminf_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k - m}) + (1 - f_m) \lambda. \end{aligned}$$

Ist  $f_m > 0$ , so folgt hieraus  $\lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k - m})$  und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_{n_k - m}) = \lambda. \quad (2.3)$$

Iteration dieses Argumentes zeigt, daß (2.3) für jedes  $m$  gilt, für das es Zahlen  $m_1, \dots, m_k$  mit  $m = m_1 + \dots + m_k$  und  $f_{m_\nu} > 0$ ,  $1 \leq \nu \leq k$ , gibt. Nun folgt aus der Erneuerungsgleichung (2.2)  $d_f = ggT\{m \geq 1 : f_m > 0\} = d_u = 1$ . Aus Lemma 2.14 folgt mit den Entsprechungen  $d \stackrel{\Delta}{=} d_f = 1$ ;  $n_1, n_2, \dots \stackrel{\Delta}{=} m_1, m_2, \dots$  mit  $f_{m_\nu} > 0$ , daß jedes hinreichend große  $m$  von dieser Form ist. (Da die  $m_\nu$  nicht verschieden sein müssen, kann auf die Faktoren  $c_\nu$  verzichtet werden.) Es gibt also ein  $M$  derart, daß (2.3) für  $m \geq M$  gilt.

(3) Für  $n \geq 0$  definiere  $r_n := \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m$ . Dann ist  $r_0 = 1$  und

$$\mu = \sum_{m=1}^{\infty} m f_m = \sum_{m=1}^{\infty} f_m + \sum_{m=2}^{\infty} f_m + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} r_n. \quad (2.4)$$

Aus  $r_m - r_{m-1} = -f_m$  und der Erneuerungsgleichung (2.2) folgt

$$\begin{aligned} r_0 u_n = u_n &= - \sum_{m=1}^n (r_m - r_{m-1}) u_{n-m} \\ \Leftrightarrow r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \dots + r_n u_0 &= r_0 u_{n-1} + \dots + r_{n-1} u_0 \end{aligned}$$

Nennt man in dieser Gleichung die linke Seite  $A_n$ , so ist die rechte  $A_{n-1}$ . Aus  $A_0 = r_0 u_0 = 1$  folgt dann  $A_n = 1 \forall n \geq 0$ , speziell

$$\sum_{\nu=0}^{n_k - M} r_\nu u_{n_k - M - \nu} = 1. \quad (2.5)$$

(4) Zeige nun  $\lambda = 1/\mu$ . Ist  $\mu < \infty$ , so gibt es nach (2.4) zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N$  mit  $(r_0 + r_1 + \dots + r_N) \geq \mu - \varepsilon$ . Ist  $k$  so groß, daß  $n_k - M \geq N$  gilt, so ist wegen (2.5)

$$1 \geq \sum_{\nu=0}^N r_\nu u_{n_k - (M+\nu)} \quad (2.6)$$

und nach (2.3) folgt  $1 \geq \lambda(r_0 + \dots + r_N) \geq \lambda(\mu - \varepsilon)$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war ist  $\lambda \leq 1/\mu$ . Andererseits ist wegen (2.5),  $u_n \leq 1$  und  $(r_{N+1} + r_{N+2} + \dots) \leq \varepsilon$

$$1 \leq \varepsilon + \sum_{\nu=0}^N r_\nu u_{n_k - (M+\nu)}.$$

Durch Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  folgt  $1 \leq \varepsilon + \lambda\mu$  und also  $\lambda \geq 1/\mu$ . Insgesamt gilt also  $\lambda = 1/\mu$  für den Fall  $\mu < \infty$ .

Im Fall  $\mu = \infty$  gibt es zu jedem  $C > 0$  ein  $N$  mit  $r_0 + \dots + r_N > C$ . Grenzübergang in (2.6) ergibt  $1 \geq C\lambda$ . Da  $C$  beliebig groß sein konnte, muß dann  $\lambda = 0$  gelten.

(5) Im Fall  $\mu = \infty$  ist damit der Beweis komplett. Für den Fall  $\mu < \infty$  läßt sich analog zu (1)-(4)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/\mu$  zeigen. Man setzt hierzu  $\tilde{\lambda} = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$ , wählt eine Teilfolge  $n_k$  mit  $u_{n_k} \rightarrow \tilde{\lambda}$  usw. □

**Satz 2.16** *Ist die homogene Markovkette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  positiv rekurrent und aperiodisch und kommunizieren alle Zustände miteinander, so gilt  $P(X_n = j) \rightarrow \rho_j \forall j \in S$ , wobei  $\rho = (\rho_j)_{j \in S}$  das dann eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho = \rho \mathbf{P}$  ist.*

**Bemerkung 2.17** *Die Invarianzgleichung  $\rho = \rho \mathbf{P}$  ist äquivalent zu der Gleichung  $\rho_k = \sum_{j \in S} \rho_j p_{jk} \forall k \in S$ . Diese Form wird im Folgenden zur Berechnung des invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes benutzt.*

**Beweis** von Satz 2.16: (1) Nach Satz 2.13 gilt  $p_{jj}^{(n)} = \sum_{m=1}^n f_{jj}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)}$  für  $j \in S$ ,  $n \geq 1$ . Ferner ist, da  $j$  rekurrent ist,  $(f_{jj}^{(m)})_{m \geq 1}$  nach Satz 2.7 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{N}$ . Da die Kette aperiodisch ist, läßt sich somit der Erneuerungssatz 2.15 mit  $u_n \hat{=} p_{jj}^{(n)}$  und  $f_m \hat{=} f_{jj}^{(m)}$  anwenden. Mit  $m_{jj} := \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$  folgt also  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{m_{jj}} \forall j \in S$ . Aus Satz 2.13 folgt dann mit  $\sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} = f_{ij}^* = 1$  (Satz 2.10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} = \frac{1}{m_{jj}} \quad \forall i, j \in S.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} P_i(X_n = j) P(X_0 = i) = \frac{1}{m_{jj}} \sum_{i \in S} P(X_0 = i) \\ &= \frac{1}{m_{jj}} \quad \forall j \in S.\end{aligned}$$

(2) Setze nun  $\rho_j := \frac{1}{m_{jj}} \quad \forall j \in S$ . Wegen der positiven Rekurrenz der Kette ist  $\rho_j = \frac{1}{m_{jj}} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} > 0$ .

Sei  $J \subseteq S$  endlich. Dann gilt  $\sum_{j \in J} \rho_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} p_{ij}^{(n)} \leq 1$ . Da  $J$  beliebig war, folgt  $\sum_{j \in S} \rho_j \leq 1$ .

Ebenso gilt für endliches  $J \subseteq S$

$$\begin{aligned}\sum_{j \in J} \rho_j p_{jk} &= \sum_{j \in J} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \right) p_{jk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} p_{ij}^{(n)} p_{jk} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} p_{jk} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ik}^{(n+1)} = \rho_k.\end{aligned}$$

Da  $J$  beliebig gewählt war, folgt

$$\sum_{j \in S} \rho_j p_{jk} \leq \rho_k \quad \forall k \in S. \quad (2.7)$$

Wegen  $\sum_{k \in S} \sum_{j \in S} \rho_j p_{jk} = \sum_{j \in S} \rho_j \sum_{k \in S} p_{jk} = \sum_{j \in S} \rho_j$  folgt die Gleichheit in (2.7) und somit die Invarianz von  $\rho$ .

Durch Iteration folgt  $\rho = \rho \mathbf{P}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\rho_j = \sum_i \rho_i p_{ij}^{(n)}$ . Mit  $\rho_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  folgt daraus  $\rho_j = \sum_i \rho_i \rho_j$ . Wegen  $\rho_j > 0$  folgt  $\sum_i \rho_i = 1$ ,  $\rho$  ist also ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß.

(3) Angenommen, es gäbe noch ein weiteres invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho} \mathbf{P}$ . Durch Iteration folgt  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho} \mathbf{P}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Mit Grenzwertbildung  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$\tilde{\rho}_k = \sum_{j \in S} \tilde{\rho}_j p_{jk}^{(n)} = \sum_{j \in S} \tilde{\rho}_j \rho_k = \rho_k$$

und somit die Eindeutigkeit von  $\rho$ . □

**Definition 2.18** (angelehnt an Definition 2.2.14 aus Sen und Singer, [11]).  
Eine Folge  $\{T_n\}$  von Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen  $\{F_n\}$  heißt **verteilungskonvergent (konvergent in Verteilung)** gegen eine Zufallsvariable  $T$  mit Verteilungsfunktion  $F$ , wenn für jeden Stetigkeitspunkt  $x$  von  $F$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ .

**Bemerkung 2.19** Sind  $\{T_n\}$  und  $T$  diskrete Zufallsvariablen auf  $\mathbb{N}_0$ , so ist die Verteilungskonvergenz äquivalent zur punktweisen Konvergenz der Zähldichten  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = f(k) \forall k \in \mathbb{N}_0$ : In diesem Fall sind  $F_n$  und  $F$  Treppenfunktionen mit (möglichen) Sprungstellen in  $\mathbb{N}_0$  und stetig, da konstant, in den dazwischenliegenden Intervallen. Für ein  $x \geq 0$  mit  $K \leq x < K + 1, K \in \mathbb{N}_0$ , gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^K f_n(j) = \sum_{j=0}^K \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(j) = \sum_{j=0}^K f(j) = F(x).$$

Die Verteilungskonvergenz wird auch „schwache Konvergenz“ genannt, da sie nur eine „punktweise“ Konvergenz der Verteilung bedeutet, jedoch keine Aussage über eine Gleichmäßigkeit in  $x$  oder allgemeiner den Abstand von  $X_n$  und  $X$  erlaubt.

Eine analoge Äquivalenz gilt für die in den folgenden Abschnitten betrachteten Mengen  $S$  statt  $\mathbb{N}_0$  als Zustandsraum der Zufallsvariablen. Aus Satz 2.16 folgt dann, daß die Verteilung von  $\{X_n\}$  schwach gegen  $\rho$  konvergiert.

In den folgenden Überlegungen wird somit  $\rho$  auch die „asymptotische Verteilung“ von  $\{X_n\}$  genannt.

## 2.2 Konstanter multiplikativer Faktor und Reset auf konstanten Level

In diesem Abschnitt wird der einfachste Fall des untersuchten Modells betrachtet, bei dem  $\mu$  und  $n_0$  konstant sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird dabei  $n_0 = 1$  gewählt, da ein konstanter Vorfaktor das Verhalten der Markovkette nicht beeinflusst. Dieser Fall gibt erste Anhaltspunkte für das Verhalten des betrachteten Modells, und es zeigt sich später, daß er häufig als Spezialfall allgemeinerer Markovketten auftritt.

Für diesen Abschnitt und das ganze Kapitel 2 sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  gegeben.

Seien  $\mu \in (0, \infty)$  und  $q \in [0, 1]$  fest, und sei  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine homogene Markovkette mit Zustandsraum  $S = \{1, \mu, \mu^2, \mu^3, \dots\}$  und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} 1 - q & , j = \mu i \\ q & , j = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \forall i, j \in S.$$

Im Spezialfall  $\mu = 1$  wäre  $S = \{1\}$  und  $X_n$  konstant, dies wäre also ein trivialer Fall. Sei deshalb  $\mu \neq 1$  vorausgesetzt. Für die Extremfälle  $q = 1$  bzw.  $q = 0$  gilt, daß die Markovkette mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant 1 ist bzw. gegen  $\infty$  für  $\mu > 1$ , gegen 0 für  $\mu < 1$  konvergiert. Da diese Fälle ebenfalls uninteressant

sind, sei im Folgenden  $q \in (0, 1)$ . Dann gilt für alle  $k \in S$

$$\begin{aligned}
P_k(X_n = j) &= \sum_{i \in S} P_k(X_n = j \cap X_{n-1} = i) \\
&= \sum_{i \in S} P(X_n = j | X_{n-1} = i) P_k(X_{n-1} = i) \\
&= \begin{cases} P(X_n = j | X_{n-1} = \frac{j}{\mu}) P_k(X_{n-1} = \frac{j}{\mu}) & , j \neq 1 \\ \sum_{i \in S} q P_k(X_{n-1} = i) = q & , j = 1 \end{cases} \quad \forall j \in S.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Das folgende Lemma untersucht das Kurzzeitverhalten von  $X_n$ . Dafür sei angenommen, daß die Kette in 1 startet.

**Lemma 2.20** Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $j \in S$  gilt:

$$P_1(X_n = j) = \begin{cases} q(1-q)^l & , j = \mu^l, 0 \leq l < n \\ (1-q)^n & , j = \mu^n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \tag{2.9}$$

**Beweis** durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang (IA):  $n = 0$ :  $P(X_0 = 1 | X_0 = 1) = 1$

Induktionsvoraussetzung (IV): Sei  $n \in \mathbb{N}$  und die Aussage für  $n - 1$  erfüllt.

Induktionsschluß (IS):

$$\begin{aligned}
P_1(X_n = \mu^n) &\stackrel{(2.8)}{=} P(X_n = \mu^n | X_{n-1} = \mu^{n-1}) P_1(X_{n-1} = \mu^{n-1}) \\
&\stackrel{IV}{=} (1-q)(1-q)^{n-1} = (1-q)^n \\
P_1(X_n = \mu^l) &\stackrel{(2.8)}{=} P(X_n = \mu^l | X_{n-1} = \mu^{l-1}) P_1(X_{n-1} = \mu^{l-1}) \\
&\stackrel{IV}{=} (1-q)q(1-q)^{l-1} = q(1-q)^l, \quad 1 \leq l < n \\
P_1(X_n = 1) &\stackrel{(2.8)}{=} q = q(1-q)^0
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^n P_1(X_n = \mu^l) &= (1-q)^n + q \sum_{l=0}^{n-1} (1-q)^l = (1-q)^n + q \frac{1 - (1-q)^n}{1 - (1-q)} = 1 \\
\Rightarrow P_1(X_n = j) &= 0, \quad j \in S \setminus \{1, \mu, \dots, \mu^n\}.
\end{aligned}$$

□

Die Verteilung verändert sich also bei wachsendem  $n$  nur in den Werten für  $\mu^l$  mit  $l \geq n$ , während die Werte für  $\mu^l, 0 \leq l < n$  konstant bleiben. Die „Masse“ im letzten Punkt  $\mu^n$  wird sozusagen bei wachsendem  $n$  immer weiter aufgeteilt

- ein  $q$ -Anteil verbleibt in  $\mu^n$ , ein  $(1 - q)$ -Anteil wird auf die folgenden Punkte  $\mu^l$  mit  $l > n$  verteilt.

Untersuche nun die Markovkette  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  auf ihr asymptotisches Verhalten. Hierbei ist besonders wichtig, daß sich mit Hilfe von Satz 2.16 speziell auch die Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilung von der Anfangsverteilung zeigen läßt. Es ist also nicht nötig, wie im Falle des Kurzzeitverhaltens, einen „Startpunkt“ oder eine Anfangsverteilung festzulegen. Hieraus ergibt sich die Vermutung, daß die asymptotische Verteilung  $\rho$  der Markovkette dem punktweisen Limes von  $P_1(X_n = j), j \in S$ , für  $n \rightarrow \infty$  entspricht, also  $\rho(\mu^l) = q(1 - q)^l, l \in \mathbb{N}_0$ . Dies wird sich im Folgenden bestätigen.

Es läßt sich zunächst feststellen:

**Satz 2.21** *Die Markovkette  $X_n$  ist aperiodisch und positiv rekurrent und alle Zustände kommunizieren miteinander.*

**Beweis:** 1. Aperiodizität:

$$\begin{aligned} P(X_n = \mu^i | X_0 = \mu^i) &\geq P(X_n = \mu^i | X_{n-i} = 1)P(X_{n-i} = 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1 | X_0 = \mu^i) \\ &\geq P(X_i = \mu^i | X_0 = 1)P(X_{n-i} = 1 | X_{n-i-1} = 1) \\ &\quad \dots P(X_2 = 1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1 | X_0 = \mu^i) \\ &\stackrel{(2.9)}{=} q^{n-i}(1 - q)^i > 0 \quad \forall n \geq i + 1, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ggT}\{n \geq 1 : \mu^i \rightsquigarrow \mu^i[n]\} &= \text{ggT}\{n \geq 1 : P(X_n = \mu^i | X_0 = \mu^i) > 0\} \\ &\leq \text{ggT}\{n \geq 1 : n \geq i + 1\} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

2. Kommunikation: Offensichtlich kommunizieren alle Zustände über die 1 (Beweis vollkommen analog zu Teil 1. des Beweises, wo unter anderem  $j \rightsquigarrow j \forall j$  gezeigt wurde).

3. Positive Rekurrenz: Sei  $j \in S$ . Da  $1 \rightsquigarrow j$ , gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $p_{1j}^{(m)} > 0$ . Damit gilt für alle  $n > m$ :

$$\begin{aligned} p_{jj}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = j) \geq P(X_n = j | X_{n-m} = 1)P(X_{n-m} = 1 | X_0 = j) \\ &= p_{1j}^{(m)} q > 0, \end{aligned}$$

also auch  $\limsup p_{jj}^{(n)} \geq p_{1j}^{(m)} q > 0$ . Damit ist die Kette positiv rekurrent.  $\square$

Nachdem die nötigen Voraussetzungen für den Konvergenzsatz 2.16 überprüft sind, kann im Folgenden die asymptotische Verteilung dieser Markovkette untersucht werden.

**Satz 2.22** Die asymptotische Verteilung der Markovkette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist ein Powerlaw auf  $S$ . Konkret gilt  $P(X_n = j) \rightarrow \rho_j = \rho(j) \forall j \in S$ ,  $\rho = (\rho_j)_{j \in S}$  das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho = \rho \mathbf{P}$  und  $\rho_j = \beta j^{-\alpha} \forall j \in S$  mit  $\alpha = -\log_\mu(1 - q)$ ,  $\beta = q$ .

**Beweis:** Nach Satz 2.21 sind die Voraussetzungen von Satz 2.16 erfüllt. Somit folgt, daß die Verteilung der  $X_n$  gegen das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho$  konvergiert. Für die asymptotische Verteilung  $\rho$  auf  $S$  muß also gelten:

$$\begin{aligned} \rho = \rho \mathbf{P} &\Rightarrow \quad \rho(\mu^0) = q \sum_{i=0}^{\infty} \rho(\mu^i), & \rho(\mu^{i+1}) &= (1 - q)\rho(\mu^i) & \forall i \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \rho(\mu^0) = q, & \rho(\mu^i) &= q(1 - q)^i & \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

Also

$$\rho_i := \rho(\mu^i) = q(1 - q)^i \quad \forall i \geq 0.$$

Tatsächlich ist  $\rho$  eine Verteilung auf  $S$ , denn  $\rho_i \geq 0 \forall i \geq 0$  sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i = q \sum_{i=0}^{\infty} (1 - q)^i = q \frac{1}{1 - (1 - q)} = 1.$$

Somit ist die asymptotische Verteilung auf  $S$ :

$$\rho(\mu^i) = q(1 - q)^i = q(\mu^i)^{\log_\mu(1 - q)}, \quad i \in \mathbb{N}_0. \quad \square$$

In diesem einfachsten Spezialfall ist die Konvergenz der Markovkette gegen ein Powerlaw also tatsächlich gegeben.

In den folgenden Abschnitten soll nun untersucht werden, wie sich das Verhalten der Markovkette ändert, wenn  $\mu$  und  $n_0$  nicht mehr konstant sind, sondern Zufallsvariablen mit eigenen Verteilungen. Dabei stößt man wegen der Diskrettheit des Zustandsraumes auf schwerwiegende kombinatorische Probleme, wenn die Verteilungen für  $\mu$  und  $n_0$  sehr allgemein gewählt werden. Da die Positivität oder Nichtpositivität der zugehörigen Dichten auf Teilmengen für die Positivität von Übergangswahrscheinlichkeiten und somit z.B. auch für die Kommunikation zwischen den Zuständen, die Aperiodizität und das asymptotische Verhalten der Kette hochgradig relevant ist, würde dies in unüberschaubaren Fallunterscheidungen resultieren. Deswegen wird in den folgenden Abschnitten nur jeweils  $\mu$  (Abschnitt 2.3) bzw.  $n_0$  (Abschnitt 2.4) als Zufallsvariable betrachtet und es werden Verteilungen mit bestimmten Zustandsräumen und zum Teil spezieller Form betrachtet, die eine explizite Darstellung der Übergangsstruktur erlauben.

## 2.3 Multiplikativer Faktor als Zufallsvariable und Reset auf konstanten Level

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich das Verhalten der Markovkette ändert, wenn der multiplikative Faktor  $\mu$  nicht mehr konstant, sondern eine Zufallsvariable ist. Der konstante Resetlevel wird wieder o.B.d.A. als  $n_0 = 1$  angenommen.

Es seien  $q \in (0, 1)$ ,  $S \subset (0, \infty)$  eine abzählbare Menge und  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine homogene Markovkette mit Zustandsraum  $S$  und Übergangswahrscheinlichkeiten der Form

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = q\delta_{1j} + (1 - q)f\left(\frac{j}{i}\right),$$

wobei  $f$  die Zähldichte einer Verteilung für die Zufallsvariable  $\mu$  auf der (abzählbaren) Menge  $M_S = \{\frac{j}{i} \mid i, j \in S\}$  und  $\delta_{1j}$  das Kroneckersymbol ist. (Häufig wird dabei  $f$  nur auf einer Teilmenge  $T$  von  $M_S$  definiert und  $\equiv 0$  gesetzt auf  $M_S \setminus T$ .)

Interessant ist nun unter anderem, unter welchen Voraussetzungen die Kette weiterhin ein asymptotisches Powerlaw erfüllt oder ein Powerlaw-ähnliches Verhalten zeigt. Zunächst läßt sich unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Konvergenz der Verteilung von  $X_n$  zeigen.

**Satz 2.23** *Sind alle Zustände in  $S$  von der 1 aus erreichbar, so ist die Kette positiv rekurrent und aperiodisch und alle Zustände kommunizieren miteinander.*

**Beweis:** (1) Sei  $j \in S$ . Da  $1 \rightsquigarrow j$ , gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $p_{1j}^{(m)} > 0$ . Damit gilt für alle  $n > m$

$p_{jj}^{(n)} \geq P(X_n = j | X_{n-m} = 1)P(X_{n-m} = 1 | X_0 = j) \geq p_{1j}^{(m)}q > 0$ , also auch  $\limsup p_{jj}^{(n)} \geq p_{1j}^{(m)}q > 0$ . Somit ist die Kette positiv rekurrent.

(2) Aperiodizität: Sei  $j \in S$ . Nach (1) ist  $p_{jj}^{(n)} > 0$  für alle  $n > m$  und somit  $\text{ggT}\{n \geq 1 : p_{jj}^{(n)} > 0\} \leq \text{ggT}\{n \geq 1 : n > m\} = 1 \forall i \in \mathbb{N}_0$ .

(3) Alle Zustände kommunizieren über die 1: Seien  $i, j \in S$ . Da  $1 \rightsquigarrow j$ , gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $p_{1j}^{(m)} > 0$ . Also gilt  $p_{ij}^{(m+1)} \geq p_{i1}p_{1j}^{(m)} \geq qp_{1j}^{(m)} > 0$ .  $\square$

Ist also  $f$  so gewählt, daß alle Zustände in  $S$  von der 1 aus erreichbar sind, so gilt nach Satz 2.16 immer die Konvergenz der Verteilung von  $X_n$  gegen das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho = \rho\mathbf{P}$ . Die Form von  $\rho$  wird in den nächsten Abschnitten anhand konkreter  $S$  und  $f$  untersucht.

### 2.3.1 Powerlaw-Verteilung für den multiplikativen Faktor

Als nächstes wird untersucht, inwieweit die Nichtkonstanz des multiplikativen Faktors die Form der asymptotischen Verteilung der Markovkette beeinflusst. Eine naheliegende Frage ist, ob eine Powerlaw-Verteilung für den multiplikativen Faktor  $\mu$  auch zu einer asymptotischen Powerlaw-Verteilung für die Markovkette führt. Diese Frage wird in diesem Abschnitt beantwortet.

Seien  $q \in (0, 1)$  und  $\mu_0 \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  fest, und sei  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine homogene Markovkette mit Zustandsraum  $S = \{1, \mu_0, \mu_0^2, \mu_0^3, \dots\}$  und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = q\delta_{1j} + (1 - q)f\left(\frac{j}{i}\right) \quad \forall i, j \in S.$$

Die Zähldichte  $f$  habe die Form

$$f(\mu_0^k) = (1 - a)a^k, k \in \mathbb{N}_0, f \equiv 0 \text{ auf } M_S \setminus S, \text{ mit } a \in (0, 1).$$

$f$  ist also selbst ein Powerlaw auf  $S$ , da  $f(\mu_0^k) = (1 - a)(\mu_0^k)^{\log_{\mu_0}(a)} \forall k \in \mathbb{N}_0$ . Erwähnenswert ist noch, daß  $f$  bis auf eine bijektive Transformation auch der Dichte einer geometrischen Verteilung entspricht. Eine geometrische Verteilung hat eine Zähldichte der Form

$$P(k) = p(1 - p)^{k-1} = (1 - q)q^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

bzw. je nach Gebrauch des Begriffes auch von der Form

$$P(k) = p(1 - p)^k = (1 - q)q^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

mit  $q = 1 - p \in (0, 1)$ . Da jedoch die Abbildung  $k \rightarrow \mu_0^k$  für  $\mu_0 \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  eine bijektive Abbildung darstellt, entspricht  $f$  bis auf eine bijektive Transformation der Zähldichte einer geometrischen Verteilung. Es gibt also eine Verwandtschaft zwischen diskreten Powerlaw-Verteilungen und geometrischen Verteilungen.

Untersuche nun, ob diese Form von  $f$  für ein asymptotisches Powerlaw hinreichend ist.

Es läßt sich feststellen, daß die Verteilung der Markovkette unter diesen Voraussetzungen gegen ein Powerlaw außerhalb der Menge der Resetlevel  $\{1\}$  konvergiert. Genauer bedeutet dies:

**Satz 2.24** Die asymptotische Verteilung  $\rho$  der Markovkette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  hat die Form

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \frac{q}{1 - (1 - q)(1 - a)}, \\ \rho(\mu_0^i) &= \frac{q(1 - q)(1 - a)}{[1 - (1 - q)(1 - a)]} (\mu_0^i)^{\log_{\mu_0}\left(\frac{a}{1 - (1 - q)(1 - a)}\right)} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (P(X_{n+1} = \mu^j | X_n = \mu^i))_{i,j} \\ &= \begin{pmatrix} q + (1-q)(1-a) & (1-q)(1-a)a & (1-q)(1-a)a^2 & \dots \\ q & (1-q)(1-a) & (1-q)(1-a)a & \dots \\ q & 0 & (1-q)(1-a) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alle Zustände in  $S$  sind von der 1 aus erreichbar:

$$\begin{aligned} P(X_k = \mu_0^k | X_0 = 1) &\geq P(X_k = \mu_0^k | X_{k-1} = \mu_0^{k-1}) \cdot \dots \cdot P(X_1 = \mu_0 | X_0 = 1) \\ &= a^k (1-a)^k (1-q)^k > 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.23 sind damit die Voraussetzungen für Satz 2.16 erfüllt. Damit folgt, daß die Verteilung von  $X_n$  gegen das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho$  konvergiert, also

$$\begin{aligned} \rho = \rho \mathbf{P} &\Rightarrow \rho(1) = (1-q)(1-a)\rho(1) + q \sum_{j=1}^{\infty} \rho(j) \\ &\Leftrightarrow (1 - (1-q)(1-a))\rho(1) = q \\ &\Leftrightarrow \rho(1) = \frac{q}{1 - (1-q)(1-a)} \\ \text{und } \rho(\mu_0^i) &= (1-q) \sum_{j=1}^i (1-a)a^{i-j} \rho(\mu_0^j) \\ &\Leftrightarrow \rho(\mu_0^i) = \frac{(1-q)(1-a)}{1 - (1-q)(1-a)} \sum_{j=0}^{i-1} a^{i-j} \rho(\mu_0^j) \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\rho(\mu_0^i) = \frac{q(1-q)(1-a)a^i}{[1 - (1-q)(1-a)]^{i+1}} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

$$\text{IA: } i = 1 : \rho(\mu_0) = \frac{(1-q)(1-a)}{1 - (1-q)(1-a)} a^1 \rho(\mu_0^0) = \frac{q(1-q)(1-a)a^1}{[1 - (1-q)(1-a)]^{1+1}}$$

IV: Sei  $i \in \mathbb{N}$  und die Aussage für  $j \in \mathbb{N}, j < i$  erfüllt.

IS:

$$\begin{aligned} \rho(\mu_0^i) &= \frac{(1-q)(1-a)}{1 - (1-q)(1-a)} \sum_{j=0}^{i-1} a^{i-j} \rho(\mu_0^j) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{(1-q)(1-a)}{1 - (1-q)(1-a)} \left\{ a^i \frac{q}{1 - (1-q)(1-a)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{i-1} a^{i-j} \frac{q(1-q)(1-a)a^j}{[1-(1-q)(1-a)]^{j+1}} \Big\} \\
= & \frac{q(1-q)(1-a)a^i}{(1-(1-q)(1-a))^2} \left\{ 1 \right. \\
& \left. + \frac{(1-q)(1-a)}{1-(1-q)(1-a)} \sum_{k=0}^{i-2} \left( \frac{1}{1-(1-q)(1-a)} \right)^k \right\} \\
= & \frac{q(1-q)(1-a)a^i}{(1-(1-q)(1-a))^2} \left\{ 1 + \frac{(1-q)(1-a)}{1-(1-q)(1-a)} \frac{1 - \left( \frac{1}{1-(1-q)(1-a)} \right)^{i-1}}{1 - \left( \frac{1}{1-(1-q)(1-a)} \right)} \right\} \\
= & \frac{q(1-q)(1-a)a^i}{[1-(1-q)(1-a)]^{i+1}}
\end{aligned}$$

Tatsächlich ist  $\rho$  eine Verteilung, denn  $\rho(\mu_0^i) \geq 0 \forall i$  und

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \rho(\mu_0^i) &= \frac{q}{1-(1-q)(1-a)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q(1-q)(1-a)a^i}{[1-(1-q)(1-a)]^{i+1}} \\
&= \frac{q}{1-(1-q)(1-a)} \left\{ 1 + (1-q)(1-a) \left[ \frac{1}{1 - \frac{a}{1-(1-q)(1-a)}} - 1 \right] \right\} \\
&= q + \frac{q(1-q)(1-a)}{(1-a) - (1-q)(1-a)} = q + 1 - q = 1.
\end{aligned}$$

Somit gilt  $\rho(1) = \frac{q}{1-(1-q)(1-a)}$  und für alle  $i \in \mathbb{N}$ :

$$\rho(\mu_0^i) = \frac{q(1-q)(1-a)a^i}{[1-(1-q)(1-a)]^{i+1}} = \frac{q(1-q)(1-a)}{[1-(1-q)(1-a)]} (\mu_0^i)^{\log_{\mu_0} \left( \frac{a}{1-(1-q)(1-a)} \right)}.$$

□

Die Markovkette hat also als asymptotische Verteilung außerhalb von  $\{1\}$  ein Powerlaw. Allerdings waren in diesem Fall auch die Voraussetzungen an  $f$  sehr stark, es wurde sozusagen das gewünschte Verhalten für  $\rho$  mit  $f$  schon in die Markovkette „hineingesteckt“. Im Folgenden wird also näher untersucht, wie sich die Kette bei anderen Verteilungen für  $\mu$  verhält und wann ein exaktes asymptotisches Powerlaw, ein Powerlaw außerhalb einer Menge von Resetleveln oder ein Powerlaw-ähnliches Verhalten (was dann noch zu definieren sein wird) resultiert.

### 2.3.2 Bedingungen für ein asymptotisches Powerlaw

Da selbst bei einer Powerlaw-Verteilung  $f$  auf  $S$  die Markovkette kein exaktes asymptotisches Powerlaw erfüllt, wird nun in diesem Abschnitt untersucht, welche Voraussetzungen für  $f$  gegeben sein müssen, damit das Powerlaw asymptotisch exakt angenommen wird. Interessanterweise zeigt sich, daß  $f$  auf  $S$

eine ganz spezielle Form haben muß, mit einem Träger von nur zwei Punkten, wenn die Verteilung von  $X_n$  gegen ein exaktes Powerlaw konvergieren soll. Diese notwendige und hinreichende Bedingung formuliert der nächste Satz.

**Satz 2.25** Seien  $q \in (0, 1)$  und  $\mu_0 \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  fest, sei  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine homogene Markovkette mit Zustandsraum  $S = \{\mu_0^i, i \in \mathbb{N}_0\}$  und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = \mu_0^k | X_n = \mu_0^l) = q\delta_{0k} + (1-q) \begin{cases} f(\mu_0^{k-l}) & , k \geq l \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \forall k, l \in S$$

mit  $f_j := f(\mu_0^j) \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} f_j = 1$ .

[D.h. der multiplikative Faktor  $\mu$  hat die Zähldichte  $f$  auf  $S$ ,  $f \equiv 0$  auf  $M_S \setminus S$ .]

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ erfülle } \begin{cases} \alpha \geq -\log_{\mu_0}(1-q) > 0, & \text{falls } \mu_0 > 1 \\ \alpha \leq -\log_{\mu_0}(1-q) < 0, & \text{falls } \mu_0 < 1 \end{cases} .$$

Dann sind äquivalent:

(1) Die asymptotische Verteilung der Markovkette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist ein Powerlaw  $\rho$  auf  $S$  mit  $\rho_k = \rho(\mu_0^k) = \beta(\mu_0^k)^{-\alpha}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $\beta = (1 - \mu_0^{-\alpha})$ .

(2) Für die Zähldichte  $f$  gilt  $f(1) = 1 - \frac{q}{(\mu_0^\alpha - 1)(1-q)}$ ,  $f(\mu_0) = \frac{q}{(\mu_0^\alpha - 1)(1-q)}$  und  $f \equiv 0$  sonst.

**Beweis:** (1)  $\Rightarrow$  (2): Die asymptotische Verteilung  $\rho$  sei also wie unter (1) gegeben. Da die asymptotische Verteilung eine invariante Verteilung ist, gilt:

$$\begin{aligned} \rho = \rho \mathbf{P} & \Rightarrow \rho_0 = (1-q)f_0\rho_0 + q \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \\ & \stackrel{q \in (0,1)}{\Leftrightarrow} \rho_0 = \frac{q}{1 - (1-q)f_0} \\ \text{und } \rho_k & = (1-q) \sum_{j=0}^k f_{k-j}\rho_j \\ & \quad (1-q) \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j}\rho_j \\ \Leftrightarrow \rho_k & = \frac{(1-q) \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j}\rho_j}{1 - (1-q)f_0} \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Aus dem Powerlaw ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho_0 = \beta(\mu_0^0)^{-\alpha} & \Leftrightarrow \beta = \frac{q}{1 - (1-q)f_0} \quad \text{und} \quad \forall k \in \mathbb{N} : \\ \rho_k = \beta(\mu_0^k)^{-\alpha} & \Leftrightarrow \frac{(1-q) \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j}\rho_j}{1 - (1-q)f_0} = \frac{q}{1 - (1-q)f_0} (\mu_0^k)^{-\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (1-q) \sum_{j=0}^{k-1} f_{k-j} \beta (\mu_0^j)^{-\alpha} = q (\mu_0^k)^{-\alpha} \\
&\Leftrightarrow (1-q) \beta \sum_{i=1}^k f_i (\mu_0^{k-i})^{-\alpha} = q (\mu_0^k)^{-\alpha} \\
&\Leftrightarrow (1-q) \frac{q}{1 - (1-q)f_0} \sum_{i=1}^k f_i (\mu_0^i)^\alpha = q \\
&\Leftrightarrow (1-q) \sum_{i=1}^k f_i (\mu_0^i)^\alpha = 1 - (1-q)f_0
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, folgt:

$$\begin{aligned}
f_k (\mu_0^k)^\alpha = 0 &\Leftrightarrow f_k = 0 \quad \forall k \geq 2 \quad \text{sowie} \\
(1-q)f_1 \mu_0^\alpha = 1 - (1-q)f_0 &\Leftrightarrow (1-q)(f_0 + f_1 \mu_0^\alpha) = 1.
\end{aligned}$$

Wegen  $f_k = 0 \quad \forall k \geq 2$  folgt:  $f_0 + f_1 = 1 \Leftrightarrow f_0 = 1 - f_1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (1-q)(1 - f_1 + f_1 \mu_0^\alpha) = 1 \Leftrightarrow q = (1-q)f_1(\mu_0^\alpha - 1) \\
&\Leftrightarrow f_1 = \frac{q}{(\mu_0^\alpha - 1)(1-q)} \\
&\Rightarrow f_0 = 1 - \frac{q}{(\mu_0^\alpha - 1)(1-q)}
\end{aligned}$$

$f$  ist damit als Dichte wohldefiniert, siehe Rückrichtung.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Überprüfe nun, ob die notwendige Bedingung für das asymptotische Powerlaw auch hinreichend ist:

Sei  $f$  auf  $S$  definiert über

$$f(1) = 1 - \frac{q}{(\mu_0^\alpha - 1)(1-q)} \quad \text{und} \quad f(\mu_0) = \frac{q}{(\mu_0^\alpha - 1)(1-q)}, \quad f \equiv 0 \text{ sonst.}$$

Wegen

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq \log_{\mu_0} \left( \frac{1}{1-q} \right), \quad \mu_0 > 1 \\ \alpha \leq \log_{\mu_0} \left( \frac{1}{1-q} \right), \quad \mu_0 < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mu_0^\alpha \geq \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \mu_0^\alpha - 1 \geq \frac{q}{1-q}$$

ist  $\mu_0^\alpha - 1 > 0$ , also  $f$  wohldefiniert, und  $f(1) \in [0, 1]$ ,  $f(\mu_0) \in (0, 1]$ . Da ebenfalls  $f(1) + f(\mu_0) = 1$  ist, ist  $f$  eine Dichte.

Offensichtlich sind alle Zustände in  $S$  wegen  $f(\mu_0) > 0$  von der 1 aus erreichbar, und nach Satz 2.23 sind damit die Voraussetzungen von Satz 2.16 erfüllt. Damit folgt nun wieder, daß die Verteilung der Markovkette  $X_n$  punktweise gegen die eindeutige invariante Verteilung  $\rho = \rho \mathbf{P}$  konvergiert. Daraus folgt:

$$\rho_0 = \frac{q}{1 - (1-q)f_0} = \frac{q}{1 - (1-q)\left(1 - \frac{q}{(\mu_0^\alpha - 1)(1-q)}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{q + \frac{q}{\mu_0^\alpha - 1}} = \frac{\mu_0^\alpha - 1}{\mu_0^\alpha - 1 + 1} = (\mu_0^\alpha - 1)\mu_0^{-\alpha} \quad \text{und} \\
\rho_k &= (1 - q)(f_0\rho_k + f_1\rho_{k-1}) \Leftrightarrow \\
\rho_k &= \frac{(1 - q)f_1\rho_{k-1}}{1 - (1 - q)f_0} = \frac{q\rho_{k-1}}{(\mu_0^\alpha - 1)[1 - (1 - q)(1 - \frac{q}{(\mu_0^\alpha - 1)(1 - q)})]} \\
&= \frac{q\rho_{k-1}}{(\mu_0^\alpha - 1)[q + \frac{q}{\mu_0^\alpha - 1}]} = \frac{\rho_{k-1}}{\mu_0^\alpha - 1 + 1} = \mu_0^{-\alpha}\rho_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt sofort:

$$\rho_k = (\mu_0^\alpha - 1)(\mu_0^{-\alpha})^{k+1} = (1 - \mu_0^{-\alpha})(\mu_0^k)^{-\alpha} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

$\rho_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = 1$  ist offensichtlich erfüllt.

In  $f_0$  und  $f_1$  ausgedrückt entspricht der Ausdruck

$$\rho_k = \frac{q}{1 - (1 - q)f_0} \left( \frac{(1 - q)f_1}{1 - (1 - q)f_0} \right)^k. \quad \square$$

**Beispiel 2.26** *Notation und Voraussetzungen seien wie in Satz 2.25. Für den Grenzfall  $\alpha = -\log_{\mu_0}(1 - q)$  ergibt sich für ein asymptotisches Powerlaw*

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{q}{(\frac{1}{1-q} - 1)(1 - q)} = 1 \Rightarrow f_0 = 0, \text{ also} \\
P(X_{n+1} = j | X_n = i) &= \begin{cases} 1 - q, & j = \mu_0 i \\ q, & j = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall i, j \in S, \text{ sowie} \\
\beta = q, \rho_k &= q(1 - q)^k.
\end{aligned}$$

*Dies entspricht also dem Fall 2.2, von dem das asymptotische Powerlaw-Verhalten ja bereits bekannt war.*

Für ein exaktes asymptotisches Powerlaw darf  $f$  also nur auf 1 und  $\mu_0$  ungleich Null sein und  $f(\mu_0)$  muß größer Null sein. Dabei ist einsichtig, warum  $f$  nur auf  $\{1, \mu_0\}$  ungleich Null sein kann, und nicht etwa auf  $\{1, \mu_0^r\}$  für ein festes  $r \geq 2$ . Denn soll es eine asymptotische Verteilung  $\rho > 0$  auf  $S$  geben, so müssen offensichtlich alle Zustände in  $S$  von der 1 aus erreichbar sein - dies ist jedoch nur für  $r = 1$  erfüllt.

Ein asymptotisches Powerlaw setzt also sehr restriktive Voraussetzungen an  $f$  voraus. Interessant wäre es deshalb im weiteren zu untersuchen, wann asymptotische Verteilungen ein Powerlaw-ähnliches Verhalten aufweisen, wobei dieses „ähnlich“ noch näher zu definieren sein wird.

### 2.3.3 Verteilung des multiplikativen Faktors auf zwei Werten

Im nächsten Schritt wird nun  $S$  verallgemeinert, so daß  $S$  nicht mehr nur aus Potenzen eines Faktors  $\mu_0$  besteht. Zunächst wird dazu  $S$  auf Vielfache zweier verschiedener Faktoren  $\mu_1$  und  $\mu_2$  verallgemeinert. Dazu seien  $q \in (0, 1)$  und  $\mu_1 \neq \mu_2 \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  fest mit  $\mu_1^i \neq \mu_2^j \forall i, j \in \mathbb{N}$ .  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine homogene Markovkette mit Zustandsraum  $S = \{\mu_1^i \mu_2^j, i, j \in \mathbb{N}_0\}$  und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = k | X_n = l) = \begin{cases} q & , k = 1 \\ (1-q)f_1 & , k = \mu_1 l \\ (1-q)f_2 & , k = \mu_2 l \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \forall k, l \in S.$$

D.h. der multiplikative Faktor  $\mu$  hat die Zähldichte

$f(\mu_1) = f_1, f(\mu_2) = f_2, f \equiv 0$  auf  $M_S \setminus \{\mu_1, \mu_2\}$ , wobei  $f_1, f_2 \in (0, 1)$  und  $f_1 + f_2 = 1$  gelte. Für das asymptotische Verhalten von  $X_n$  ergibt sich die folgende Aussage:

**Satz 2.27** *Unter obigen Voraussetzungen ist die asymptotische Verteilung der Markovkette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegeben durch die Verteilung  $\rho$  mit*

$$\rho(\mu_1^i \mu_2^j) = \binom{i+j}{i} q (1-q)^{i+j} f_1^i f_2^j.$$

**Beweis:** Alle Zustände sind von der 1 aus erreichbar:

$$\begin{aligned} P(X_{i+j} = \mu_1^i \mu_2^j | X_0 = 1) &\geq P(X_{i+j} = \mu_1^i \mu_2^j | X_{i+j-1} = \mu_1^i \mu_2^{j-1}) \cdot \dots \\ &\cdot P(X_{i+1} = \mu_1^i \mu_2 | X_i = \mu_1^i) P(X_i = \mu_1^i | X_{i-1} = \mu_1^{i-1}) \cdot \dots \\ &\cdot P(X_1 = \mu_1 | X_0 = 1) = f_1^i f_2^j > 0. \end{aligned}$$

Mit den Sätzen 2.23 und 2.16 folgt nun, daß die Verteilung der Markovkette  $X_n$  punktweise gegen  $\rho$  konvergiert, wobei  $\rho$  die eindeutige invariante Verteilung ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \rho(\mu_1^0 \mu_2^0) &= q \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho(\mu_1^i \mu_2^j) = q, \\ \rho(\mu_1^0 \mu_2^j) &= (1-q) f_2 \rho(\mu_1^0 \mu_2^{j-1}) \forall j \in \mathbb{N}, \\ \rho(\mu_1^i \mu_2^0) &= (1-q) f_1 \rho(\mu_1^{i-1} \mu_2^0) \forall i \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \\ \rho(\mu_1^i \mu_2^j) &= (1-q) (f_1 \rho(\mu_1^{i-1} \mu_2^j) + f_2 \rho(\mu_1^i \mu_2^{j-1})) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\rho(\mu_1^i \mu_2^j) = \binom{i+j}{i} q (1-q)^{i+j} f_1^i f_2^j$$

durch zweidimensionale vollständige Induktion nach  $i$  und  $j$  (siehe Satz A.4 in Anhang A):

$$(i) \quad \rho(\mu_1^0 \mu_2^0) = q = \binom{0}{0} q(1-q)^{0+0} f_1^0 f_2^0$$

$$(ii) \quad \text{Sei } j \in \mathbb{N} \text{ und } \rho(\mu_1^0 \mu_2^j) = \binom{j}{0} q(1-q)^j f_1^0 f_2^j.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \rho(\mu_1^0 \mu_2^{j+1}) &= (1-q) f_2 \rho(\mu_1^0 \mu_2^j) = \binom{j}{0} q(1-q)^{j+1} f_1^0 f_2^{j+1} \\ &= \binom{j+1}{0} q(1-q)^{j+1} f_1^0 f_2^{j+1}. \end{aligned}$$

Analoges gilt aus Symmetriegründen für  $i \in \mathbb{N}$  und  $j = 0$ .

$$(iii) \quad \text{Seien } i, j \in \mathbb{N} \text{ und } \rho(\mu_1^i \mu_2^{j+1}) = \binom{i+j+1}{i} q(1-q)^{i+j+1} f_1^i f_2^{j+1} \text{ sowie} \\ \rho(\mu_1^{i+1} \mu_2^j) = \binom{i+1+j}{i+1} q(1-q)^{i+1+j} f_1^{i+1} f_2^j \text{ (IV). Dann ist}$$

$$\begin{aligned} \rho(\mu_1^{i+1} \mu_2^{j+1}) &= (1-q)[f_1 \rho(\mu_1^i \mu_2^{j+1}) + f_2 \rho(\mu_1^{i+1} \mu_2^j)] \\ &\stackrel{IV}{=} (1-q) \left[ f_1 \frac{(i+j+1)!}{i!(j+1)!} q(1-q)^{i+j+1} f_1^i f_2^{j+1} \right. \\ &\quad \left. + f_2 \frac{(i+1+j)!}{(i+1)!j!} q(1-q)^{i+1+j} f_1^{i+1} f_2^j \right] \\ &= \frac{q(1-q)^{i+1+j+1} f_1^{i+1} f_2^{j+1}}{(i+1)!(j+1)!} [(i+1)(i+j+1)! \\ &\quad + (j+1)(i+1+j)!] \\ &= \frac{(i+1+j+1)!}{(i+1)!(j+1)!} q(1-q)^{i+1+j+1} f_1^{i+1} f_2^{j+1} \\ &= \binom{i+1+j+1}{i+1} q(1-q)^{i+1+j+1} f_1^{i+1} f_2^{j+1}. \end{aligned}$$

Mit zweidimensionaler vollständiger Induktion (Satz A.4) folgt die Behauptung.

$\rho$  ist tatsächlich eine Verteilung auf  $S$ , denn  $\rho(\mu_1^i \mu_2^j) \geq 0 \forall i, j \in \mathbb{N}_0$  und

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \rho(\mu_1^i \mu_2^j) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} q(1-q)^{i+j} f_1^i f_2^j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} q[(1-q)f_1]^i \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} [(1-q)f_2]^j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} q[(1-q)f_1]^i \frac{1}{[1-(1-q)f_2]^{i+1}} = \frac{q}{1-(1-q)f_2} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{(1-q)f_1}{1-(1-q)f_2} \right]^i \\ &= \frac{q}{1-(1-q)f_2} \cdot \frac{1}{1-\frac{(1-q)f_1}{1-(1-q)f_2}} = \frac{q}{1-(1-q)f_2 - (1-q)f_1} = 1. \end{aligned}$$

□

Offensichtlich erfüllt  $\rho$  kein Powerlaw. Zu untersuchen bleibt, ob sich diese asymptotische Verteilung vielleicht einem Powerlaw annähert für  $i \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$ , also nur ein Powerlaw-, „ähnliches“ Verhalten zeigt. Diese Frage wird in Abschnitt 2.3.4 behandelt.

Offensichtlich würde sich Fall 2.3.3,  $f(\mu_1) = f_1, f(\mu_2) = f_2$ , für  $\mu_1 = 1$  mit  $\mu_2 \stackrel{\wedge}{=} \mu_0$  zu Fall 2.3.2 (unter Voraussetzung (2)) vereinfachen. Wie hängen nun die Ergebnisse für diese beiden Fälle zusammen?

Berücksichtigt man die dann fehlende Eindeutigkeit wegen  $1^i = 1 \forall i \in \mathbb{N}_0$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho(\mu_0^k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{2.3.3}(1^i \mu_0^k) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k}{i} q(1-q)^{i+k} f_0^i f_1^k \\ &= q(1-q)^k f_1^k \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k}{i} (1-q)^i f_0^i = \frac{q((1-q)f_1)^k}{[1-(1-q)f_0]^{k+1}} = \rho_{2.3.2}(\mu_0^k). \end{aligned}$$

Die Ergebnisse sind also konsistent.

## 2.3.4 Untersuchung auf Powerlaw-äquivalentes Verhalten

Die asymptotische Verteilung  $\rho(\mu_1^i \mu_2^j) = \frac{(i+j)!}{i!j!} q(1-q)^{i+j} f_1^i f_2^j$  aus Teil 2.3.3 beschreibt nicht exakt ein Powerlaw. Aber vielleicht nähert sie sich für große  $i$  und  $j$  einem Powerlaw an, also verhält sich wie ein Powerlaw für  $i, j \rightarrow \infty$ ? Für Folgen in (nur einer Variablen)  $n$  gibt es die folgende Definition für asymptotisch gleiches Verhalten (siehe z.B. Krenzel, [8], S. 76):

**Definition 2.28** *Zwei Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißen **asymptotisch äquivalent** für  $n \rightarrow \infty$ , kurz  $a_n \sim b_n$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .*

Dabei läßt sich leicht zeigen, daß es sich hier tatsächlich um eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Folgen handelt, also  $a_n \sim a_n$ ,  $(a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n)$  sowie  $((a_n \sim b_n, b_n \sim c_n) \Rightarrow a_n \sim c_n)$  für alle Folgen  $(a_n), (b_n), (c_n), n \in \mathbb{N}$ . ( $\star$ )

In obigem Fall verhält sich die Sache etwas komplizierter, da  $\rho(\mu_1^i \mu_2^j)$  von  $i$  und  $j$  abhängt. Ist also das Verhalten für gleichzeitig  $i, j \rightarrow \infty$  von Interesse, so ist noch zu klären, auf welche Art diese Limesbildung geschehen soll. Da hier die Frage ist, ob sich  $\rho(\mu_1^i \mu_2^j)$  für gleichzeitig große  $i$  und  $j$  wie ein Powerlaw verhält, ist eine sinnvolle Möglichkeit zum Beispiel,  $j$  als Funktion von  $i$  zu betrachten und eine mögliche asymptotische Äquivalenz für  $i \rightarrow \infty$  zu untersuchen. Verhält sich  $\rho(\mu_1^i \mu_2^j)$  für große  $i$  und  $j$  tatsächlich wie ein Powerlaw, so müßte insbesondere  $\rho(\mu_1^i \mu_2^j)$  für jede streng monotone (z.B. lineare) Funktion  $j = f(i)$  für  $i \rightarrow \infty$  zu einem entsprechenden Powerlaw äquivalent sein. Es stellt sich jedoch heraus, daß dies nicht der Fall ist, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 2.29** Für  $\rho$  aus Fall 2.3.3 gilt:

$$\begin{aligned}\rho(\mu_1^i \mu_2^i) &\sim \frac{q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{i}} (2(1-q)f_1)^i (2(1-q)f_2)^i \\ &= \frac{q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{i}} (\mu_1^i)^{\log_{\mu_1}(2(1-q)f_1)} (\mu_2^i)^{\log_{\mu_2}(2(1-q)f_2)}, \quad i \rightarrow \infty \quad (j=i), \\ \rho(\mu_1^i \mu_2^{2i}) &\sim \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{3}{2i}} (3(1-q)f_1)^i \left(\frac{3}{2}(1-q)f_2\right)^{2i} \\ &= \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{3}{2i}} (\mu_1^i)^{\log_{\mu_1}(3(1-q)f_1)} (\mu_2^{2i})^{\log_{\mu_2}(\frac{3}{2}(1-q)f_2)}, \quad i \rightarrow \infty \quad (j=2i).\end{aligned}$$

**Beweis:** Nach der Stirlingschen Formel (z.B. Satz 5.1. aus Krengel, [8],) gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt mit  $(\star)$ :

$$\begin{aligned}\rho(\mu_1^i \mu_2^i) &= \frac{(2i)!}{i!i!} q(1-q)^{i+i} f_1^i f_2^i \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi(2i)} e^{-2i} (2i)^{2i}}{2\pi i e^{-2i} i^{2i}} q(1-q)^{i+i} f_1^i f_2^i \\ &= \frac{q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{i}} (2(1-q)f_1)^i (2(1-q)f_2)^i \\ &= \frac{q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{i}} (\mu_1^i)^{\log_{\mu_1}(2(1-q)f_1)} (\mu_2^i)^{\log_{\mu_2}(2(1-q)f_2)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\rho(\mu_1^i \mu_2^{2i}) &= \frac{(3i)!}{i!(2i)!} q(1-q)^{i+2i} f_1^i f_2^{2i} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi(3i)} e^{-3i} (3i)^{3i}}{\sqrt{2\pi i} e^{-i} i^i \sqrt{2\pi 2i} e^{-2i} (2i)^{2i}} q(1-q)^{i+2i} f_1^i f_2^{2i} \\ &= \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{3}{2i}} (3(1-q)f_1)^i \left(\frac{3}{2}(1-q)f_2\right)^{2i} \\ &= \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{3}{2i}} (\mu_1^i)^{\log_{\mu_1}(3(1-q)f_1)} (\mu_2^{2i})^{\log_{\mu_2}(\frac{3}{2}(1-q)f_2)}.\end{aligned}$$

□

Offensichtlich ist also  $\rho(\mu_1^i \mu_2^{f(i)})$  nicht für jedes streng monotone  $f$  zu einem Powerlaw asymptotisch äquivalent für  $i \rightarrow \infty$ . Gäbe es ein solches Powerlaw, so müßte es wegen  $(\star)$  auch zu den oben bestimmten asymptotisch äquivalenten Folgen äquivalent sein. Diese lassen sich jedoch nicht auf eine (erst recht

nicht gemeinsame) Powerlawform bringen.  $\frac{1}{\sqrt{i}}$  ist nicht-exponentiell, und die Vorfaktoren und Exponenten stimmen für  $f = id$  bzw.  $f = 2id$  auch nicht überein. Es kann also nicht sinnvoll davon die Rede sein, daß sich  $\rho(\mu_1^i \mu_2^j)$  für große  $i$  und  $j$  wie ein Powerlaw verhält.

### 2.3.5 Verteilung des multiplikativen Faktors auf $N$ Werten

Seien  $q \in (0, 1)$  und  $N \in \mathbb{N}$  sowie  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  fest und es gelte

$$\prod_{i=1}^N \mu_i^{n_i} = \prod_{i=1}^N \mu_i^{l_i} \text{ für } n_j, l_j \in \mathbb{N}_0, j \in \{1, \dots, N\} \Rightarrow (n_1, \dots, n_N) = (l_1, \dots, l_N).$$

$X_n$  sei eine homogene Markovkette mit Zustandsraum

$S = \{ \prod_{i=1}^N \mu_i^{n_i} \mid n_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, N \}$  und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = k \mid X_n = l) = \begin{cases} q & , k = 1 \\ (1 - q)f_i & , k = \mu_i l, i \in \{1, \dots, N\} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \forall k, l \in S$$

D.h. der multiplikative Faktor  $\mu$  hat die Zähldichte

$$f(\mu_i) = f_i, i = 1, \dots, N, f \equiv 0 \text{ auf } M_S \setminus \{\mu_1, \dots, \mu_N\},$$

wobei  $f_i \in (0, 1) \forall i \in \{1, \dots, N\}$  und  $\sum_{i=1}^N f_i = 1$  gelte.

Analog zum Fall  $N = 2$  aus Abschnitt 2.3.3 ergibt sich für das asymptotische Verhalten folgende Aussage:

**Satz 2.30** *Unter obigen Voraussetzungen ist die asymptotische Verteilung der Markovkette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegeben durch die Verteilung  $\rho$  mit*

$$\rho(\mu_1^{n_1} \mu_2^{n_2} \dots \mu_N^{n_N}) = \frac{(\sum_{i=1}^N n_i)!}{\prod_{i=1}^N (n_i!)} q (1 - q)^{\sum_{i=1}^N n_i} \prod_{i=1}^N f_i^{n_i} \quad \forall n_i \in \mathbb{N}_0, i \in \{1, \dots, N\}.$$

**Beweis:** Analog zum Beweis von Satz 2.27 sind alle Zustände in  $S$  von der 1 aus erreichbar. Mit Satz 2.23 und Satz 2.16 folgt wieder, daß die Verteilung der Markovkette  $X_n$  punktweise gegen  $\rho$  konvergiert, wobei  $\rho$  die eindeutige stationäre Verteilung  $\rho = \rho \mathbf{P}$  ist. Daraus folgt:

$$\rho(1) = q \text{ und mit der Setzung}$$

$$\rho\left(\prod_{j=1}^N \mu_j^{n_j}\right) := 0 \text{ falls } n_j = -1 \text{ für ein } j \in \{1, \dots, N\} (*)$$

folgt ebenfalls

$$\rho(\mu_1^{n_1} \mu_2^{n_2} \dots \mu_N^{n_N}) = (1 - q) \sum_{i=1}^N f_i \rho(\mu_1^{n_1} \dots \mu_i^{n_i-1} \dots \mu_N^{n_N})$$

$$\forall n_i \in \mathbb{N}_0, i \in \{1, \dots, N\}.$$

Daraus ergibt sich

$$\rho(\mu_1^{n_1} \mu_2^{n_2} \dots \mu_N^{n_N}) = \frac{(\sum_{i=1}^N n_i)!}{\prod_{i=1}^N (n_i!)} q(1-q)^{\sum_{i=1}^N n_i} \prod_{i=1}^N f_i^{n_i} \quad \forall n_i \in \mathbb{N}_0, i \in \{1, \dots, N\}.$$

durch vollständige Induktion nach  $n_1, \dots, n_N$  (siehe in Anhang A Satz A.6):

$$(i) \quad \rho(\mu_1^0 \mu_2^0 \dots \mu_N^0) = \rho(1) = q = \frac{(\sum_{i=1}^N 0)!}{\prod_{i=1}^N (0!)} q(1-q)^{\sum_{i=1}^N 0} \prod_{i=1}^N f_i^0.$$

(ii) Sei  $\mathcal{M} \subseteq \{1, \dots, N\}$  eine beliebige Teilmenge. Wegen der Symmetrie in der Aussage sei o.B.d.A.  $\mathcal{M} = \{1, \dots, K\}$  für ein  $1 \leq K \leq N$ . Seien  $n_1, \dots, n_K \in \mathbb{N}_0$  und für jedes feste  $1 \leq m \leq K$  sei die Formel für das  $N$ -Tupel  $(n_1 + 1, \dots, n_{m-1} + 1, n_m, n_{m+1} + 1, \dots, n_K + 1, 0, \dots, 0)$  wahr (IV). Dann folgt:

$$\begin{aligned} & \rho(\mu_1^{n_1+1} \mu_2^{n_2+1} \dots \mu_K^{n_K+1} \mu_{K+1}^0 \dots \mu_N^0) \\ & \stackrel{(*)}{=} (1-q) \sum_{i=1}^K f_i \rho(\mu_1^{n_1+1} \dots \mu_{i-1}^{n_{i-1}+1} \mu_i^{n_i} \mu_{i+1}^{n_{i+1}+1} \dots \mu_K^{n_K+1} \mu_{K+1}^0 \dots \mu_N^0) \\ & \stackrel{(IV)}{=} (1-q) \sum_{i=1}^K f_i \frac{(\sum_{j=1, j \neq i}^K (n_j + 1) + n_i)!}{\prod_{j=1, j \neq i}^K (n_j + 1)! (n_i)!} \\ & \quad \cdot q(1-q)^{\sum_{j=1, j \neq i}^K (n_j+1) + n_i} \left( \prod_{j=1, j \neq i}^K f_j^{n_j+1} \right) f_i^{n_i} \\ & = q(1-q)^{\sum_{j=1}^K (n_j+1)} \prod_{j=1}^K f_j^{n_j+1} \frac{(\sum_{j=1}^K (n_j + 1) - 1)!}{\prod_{j=1}^K (n_j + 1)!} \sum_{i=1}^K (n_i + 1) \\ & = \frac{(\sum_{j=1}^K (n_j + 1) + \sum_{j=K+1}^N 0)!}{\prod_{j=1}^K (n_j + 1)! \prod_{j=K+1}^N 0!} q(1-q)^{\sum_{j=1}^K (n_j+1) + \sum_{j=K+1}^N 0} \prod_{j=1}^K f_j^{n_j+1} \prod_{j=K+1}^N f_j^0 \end{aligned}$$

Mit  $N$ -dimensionaler vollständiger Induktion (Satz A.6) folgt also die Behauptung.  $\rho$  ist eine Verteilung analog zu Satz 2.27.  $\square$

Auch in diesem Fall entspricht die asymptotische Verteilung also nicht exakt einem Powerlaw. Ein Powerlaw-äquivalentes Verhalten läßt sich analog zu Abschnitt 2.3.4 ausschließen.

## 2.4 Konstanter multiplikativer Faktor und Resetlevel als Zufallsvariable

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Markovkette untersucht, wenn der Level für das Reset nicht mehr konstant ist, sondern eine Zufallsvariable mit einer Verteilung, die durch die Zähldichte  $f$  beschrieben wird.

Seien  $q \in (0, 1)$  und  $\mu \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  fest, und sei  $f$  eine Zähldichte auf einer abzählbaren Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$ , d.h.  $\sum_{j \in M} f(j) = 1, f(j) \in [0, 1] \forall j \in M$ . Sei

$S = \{m\mu^i | m \in M, i \in \mathbb{N}_0\}$ . Damit gilt  $M \subseteq S$ . Setze  $f$  auf  $S$  fort durch  $f(j) := 0 \forall j \in S \setminus M$ . Dann ist  $f$  eine Zähldichte auf  $S$ .

Sei  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine homogene Markovkette mit Zustandsraum  $S$  und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = qf(j) + (1 - q)\mathbb{1}_{\{\mu i\}}(j) \quad \forall i, j \in S,$$

$$\text{wobei } \mathbb{1}_{\{\mu i\}}(j) = \begin{cases} 1, & j = \mu i \\ 0, & j \neq \mu i \end{cases}.$$

Insbesondere vereinfacht sich dies zu Fall 2.2 für  $1 \in M, f(1) = 1, f \equiv 0$  auf  $M \setminus \{1\}$ .

Auch hier folgt zunächst ein allgemeiner Satz, der für die Konvergenzaussage benötigt wird.

**Satz 2.31** (1) Ist  $f > 0$  auf  $M$ , so kommunizieren alle Zustände miteinander.  
 (2) Kommunizieren alle Zustände miteinander, so ist die Kette auch positiv rekurrent und aperiodisch.

**Beweis:** (1) Sei  $f > 0$  auf  $M$ . Seien  $m\mu^i$  und  $\bar{m}\mu^j \in S$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(X_{i+1} = m\mu^i | X_0 = \bar{m}\mu^j) &\geq P(X_{i+1} = m\mu^i | X_i = m\mu^{i-1}) \cdot \dots \\ &\cdot P(X_2 = m\mu | X_1 = m)P(X_1 = m | X_0 = \bar{m}\mu^j) \geq (1 - q)^i qf(m) > 0. \end{aligned}$$

Somit kommunizieren alle Zustände in  $S$ .

(2) Sei  $j \in S$  und sei  $k \in M$  mit  $f(k) > 0$ . ( $k$  existiert wegen  $\sum_i f(i) = 1$ .) Da  $k \rightsquigarrow j$ , gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $p_{kj}^{(N)} > 0$ . Für alle  $n > N$  gilt dann

$$P(X_{n-N} = k | X_0 = j) = \sum_{i \in S} P(X_{n-N} = k | X_{n-N-1} = i)P(X_{n-N-1} = i | X_0 = j)$$

$$\geq \sum_{i \in S} qf(k)P(X_{n-N-1} = i | X_0 = j) = qf(k)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_{jj}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = j) \geq P(X_n = j | X_{n-N} = k)P(X_{n-N} = k | X_0 = j) \\ &\geq p_{kj}^{(N)} qf(k) > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Damit ist auch  $\limsup p_{jj}^{(n)} \geq p_{kj}^{(N)} qf(k) > 0$ . Die Kette ist somit positiv rekurrent.

Aperiodizität: Sei  $j \in S$ . Nach (2.10) ist  $p_{jj}^{(n)} > 0$  für alle  $n > N$  und somit  $\text{ggT}\{n \geq 1 : p_{jj}^{(n)} > 0\} \leq \text{ggT}\{n \geq 1 : n > N\} = 1 \forall i \in \mathbb{N}_0$ .  $\square$

Wird also  $M$  so klein gewählt, daß nur Werte  $m$  mit  $f(m) > 0$  enthalten sind, so erfüllt die Markovkette die Voraussetzungen von Satz 2.16 und dieser liefert die punktweise Konvergenz der Verteilung gegen die eindeutige invariante Verteilung  $\rho$ .

In den folgenden Abschnitten werden konkrete Verteilungen für den Resetlevel untersucht.

### 2.4.1 Verteilung des Resetlevels auf $N$ Werten

Seien  $N \in \mathbb{N}$ ,  $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{R}^{>0}$  und  $f(m_i) = f_i \forall i \in \{1, \dots, N\}$  mit  $f_i \in (0, 1)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  und  $\sum_{n=1}^N f_i = 1$  (Zähldichte  $f$  für den Resetlevel auf

$M = \{m_1, \dots, m_N\}$ ).

Zusätzlich gelte  $m\mu^k = \bar{m}\mu^{\bar{k}}$ ,  $m, \bar{m} \in \{m_1, \dots, m_N\}$ ,  $k, \bar{k} \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow m = \bar{m}, k = \bar{k}$ , also insbesondere  $m_i \neq m_j$  für  $i \neq j$ .

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  sei eine homogene Markovkette mit Zustandsraum

$S = \{m\mu^k \mid m \in \{m_1, \dots, m_N\}, k \in \mathbb{N}_0\}$

und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = q \sum_{n=1}^N f_n \delta_{m_n j} + (1-q) \delta_{(\mu i) j}.$$

$\delta_{kj}$  bezeichne wieder das Kroneckersymbol.

**Satz 2.32** *Bei vorgegebenen  $m_1, \dots, m_N$  erfüllt die Verteilung obiger Markovkette genau dann asymptotisch ein Powerlaw, wenn  $f_i = \frac{m_i^{-\alpha}}{\sum_{n=1}^N m_n^{-\alpha}}$  mit  $\alpha =$*

$\log_\mu\left(\frac{1}{1-q}\right)$ . In diesem Fall hat das Powerlaw die Form  $\rho(s) = As^{-\alpha}$  auf  $S$  mit

$$A = \frac{1-\mu^{-\alpha}}{\sum_{n=1}^N m_n^{-\alpha}} = \frac{q}{\sum_{n=1}^N m_n^{-\alpha}}.$$

**Beweis:** Da  $f > 0$  auf  $M = \{m_1, \dots, m_N\}$ , folgt mit Satz 2.31 und Satz 2.16, daß die Verteilung der  $X_n$  punktweise gegen das eindeutig bestimmte invariante

Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho$  konvergiert. Für die asymptotische Verteilung  $\rho$  auf  $S$  muß also gelten:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho P \\ \Rightarrow \rho(m_i \mu^0) &= q f_i, \\ \rho(m_i \mu^j) &= (1 - q) \rho(m_i \mu^{j-1}), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt sofort:

$$\begin{aligned} \rho(m_i \mu^j) &= q f_i (1 - q)^j = q f_i (\mu^j)^{\log_\mu(1-q)} \\ &= q f_i m_i^{-\log_\mu(1-q)} (m_i \mu^j)^{-\log_\mu(\frac{1}{1-q})}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Das Powerlaw ist genau dann erfüllt, wenn der Vorfaktor unabhängig von  $i$  konstant ist, also

$$\begin{aligned} f_i m_i^{-\log_\mu(1-q)} &= f_k m_k^{-\log_\mu(1-q)} \quad \forall i, k \in \{1, \dots, N\} \\ \Leftrightarrow \frac{f_i}{m_i^{-\log_\mu(\frac{1}{1-q})}} &= \frac{f_k}{m_k^{-\log_\mu(\frac{1}{1-q})}} \quad \forall i, k \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Proportionalität der  $f_i$  zu  $m_i^{-\log_\mu(\frac{1}{1-q})}$  für  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Die Normierungsbedingung  $\sum_{n=1}^N f_i = 1$  liefert den ersten Teil der Behauptung. Einsetzen von  $f_i$  in (2.11) ergibt den zweiten Teil.  $\square$

**Beispiel 2.33** Ist z.B.  $q = \frac{1}{2}$  und  $\mu = 2$  und sind  $m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 5$ , so ergibt sich daraus  $\alpha = \log_2(2) = 1$  und  $\sum_{n=1}^3 m_n^{-\alpha} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$ . Damit wäre eine Resettdichte  $f$  auf  $M = \{1, 3, 5\}$  von  $f_1 = \frac{15}{23}, f_2 = \frac{5}{23}$  und  $f_3 = \frac{3}{23}$  nötig für ein asymptotisches Powerlaw auf  $S = \{m \cdot 2^j | m \in \{1, 3, 5\}, j \in \mathbb{N}_0\}$ . Dieses hätte dann die Form  $\rho(m \cdot 2^j) = \frac{15}{46} (m \cdot 2^j)^{-1}$  für alle  $m 2^j \in S$ . Wäre hingegen  $f$  z.B. die Zähldichte einer Gleichverteilung auf 1, 3 und 5, also  $f_1 = f_2 = f_3 = \frac{1}{3}$ , so würde sich  $\rho(m \cdot 2^j) = \frac{1}{6} (\frac{1}{2})^j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$  für alle  $m \in \{1, 3, 5\}$  ergeben. Dies entspräche drei verschiedenen Powerlaws

$$\begin{aligned} \rho(1 \cdot 2^j) &= \frac{1}{6} (1 \cdot 2^j)^{-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, \\ \rho(3 \cdot 2^j) &= \frac{1}{2} (3 \cdot 2^j)^{-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, \\ \rho(5 \cdot 2^j) &= \frac{5}{6} (5 \cdot 2^j)^{-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

auf den drei verschiedenen „Strängen“, also Teilmengen  $\{1 \cdot 2^j | j \in \mathbb{N}_0\}, \{3 \cdot 2^j | j \in \mathbb{N}_0\}$  und  $\{5 \cdot 2^j | j \in \mathbb{N}_0\}$  von  $S$ . Für diese stimmt zwar  $\alpha = 1$  überein, nicht jedoch der konstante Vorfaktor  $A$ .

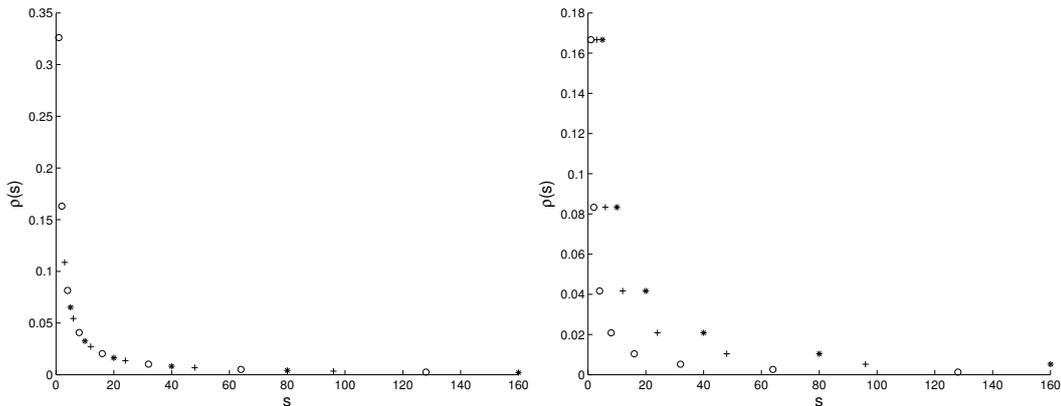


Abbildung 2.1:  $\rho(s)$  auf  $S$  für  $q = \frac{1}{2}$ ,  $\mu = 2$  und  $m_1 = 1, m_2 = 3$  und  $m_3 = 5$ . Links  $f_1 = \frac{15}{23}, f_2 = \frac{5}{23}, f_3 = \frac{3}{23}$ , rechts Gleichverteilung auf  $\{m_1, m_2, m_3\}$ .

Der Verlauf von  $\rho(s)$  auf  $S$  für beide  $f$  ist in Abbildung 2.1 mit Matlab dargestellt. „o“, „+“ und „\*“ verdeutlichen jeweils die drei „Stränge“  $\{1 \cdot 2^j | j \in \mathbb{N}_0\}, \{3 \cdot 2^j | j \in \mathbb{N}_0\}$  und  $\{5 \cdot 2^j | j \in \mathbb{N}_0\}$  von  $S$ .

Somit muß bei vorgegebenen  $m_1, \dots, m_N$  die Resetverteilung in Abhängigkeit der  $m_i$  gewählt werden, damit asymptotisch das Powerlaw erfüllt ist. Eine Konvergenz gegen ein asymptotisches Powerlaw unabhängig von der Verteilung für den Resetlevel ist im Allgemeinen nicht gegeben.

Angesichts der Form von  $\rho$  in (2.11), die ja Powerlaw-artig ist, aber zu verschiedenen Vorfaktoren auf verschiedenen „Strängen“  $\{m_i, m_i\mu, m_i\mu^2, \dots\}$  von  $S$  führen kann, ist ein gesondertes Untersuchen von  $\rho$  auf Powerlaw-äquivalentes Verhalten auch nicht sinnvoll.

Allerdings ist interessanterweise im Falle eines Powerlaws der Exponent  $\alpha$  tatsächlich nicht abhängig von der Dichte  $f$  der Resetlevel-Verteilung oder der Menge der Trägerpunkte  $\{m_1, \dots, m_N\}$ , sondern nur von  $\mu$  und  $q$ .

## 2.4.2 Verteilung des Resetlevels auf $S$

Sei  $f$  eine Zähldichte auf  $S := \{\mu^k | k \in \mathbb{N}_0\}$ ,  $f_k := f(\mu^k), k \in \mathbb{N}_0, f_k \geq 0, \sum_{k \in \mathbb{N}_0} f_k = 1$ . Ferner gelte  $f(1) > 0$ , so daß alle Zustände in  $S$  kommunizieren (siehe Satz 2.35).

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sei eine homogene Markovkette mit Zustandsraum  $S$  und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = qf(j) + (1 - q)\delta_{(\mu i)j}, \quad \forall i, j \in S.$$

Für die weiteren Aussagen wird ein Hilfssatz aus der Analysis benötigt, siehe z.B. Satz II.93 in Jongen und Schmidt, [5]:

**Lemma 2.34** (Konvergenzsatz von Mertens)

Vor.:  $(a_j), (b_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ ,  $\sum a_j$  absolut-konvergent,  $\sum b_j$  konvergent,  $\sum c_j$  das Cauchy-Produkt von  $\sum a_j$  und  $\sum b_j$ , d.h.  $c_n := \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Beh.:  $\sum c_j$  ist konvergent, und es gilt  $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$ .

Damit läßt sich zeigen:

**Satz 2.35** Die asymptotische Verteilung der obigen Markovkette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist die Verteilung  $\rho$  auf  $S$  mit  $\rho(\mu^k) = q \sum_{i=0}^k (1-q)^{k-i} f(\mu^i)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Beweis:** Seien  $i, k \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = \mu^k \mid X_0 = \mu^i) &\geq P(X_{k+1} = \mu^k \mid X_k = \mu^{k-1}) \cdot \dots \cdot P(X_2 = \mu \mid X_1 = 1) P(X_1 = 1 \mid X_0 = \mu^i) \\ &\geq (1-q)^k q f(1) > 0. \end{aligned}$$

Somit kommunizieren alle Zustände in  $S$  miteinander und nach Satz 2.31 ist die Kette auch positiv rekurrent und aperiodisch. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 2.16 erfüllt. Es folgt die punktweise Konvergenz der Verteilung von  $X_n$  gegen das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\rho$ . Für die asymptotische Verteilung  $\rho$  auf  $S$  muß also gelten:

$$\begin{aligned} \rho = \rho P &\Rightarrow \rho(1) = q f(1), \quad \rho(\mu^k) = q f(\mu^k) + (1-q)\rho(\mu^{k-1}), \quad k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \rho(\mu^k) = q \sum_{i=0}^k (1-q)^{k-i} f(\mu^i). \end{aligned}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

IA:  $k = 0$  :  $\rho(\mu^0) = \rho(1) = q f(\mu^0)$

IV: Sei  $k \in \mathbb{N}$ , und die Formel sei für alle  $i \leq k-1$  erfüllt.

IS: Dann gilt:

$$\begin{aligned} \rho(\mu^k) &= q f(\mu^k) + (1-q)\rho(\mu^{k-1}) \stackrel{IV}{=} q f(\mu^k) + (1-q)q \sum_{i=0}^{k-1} (1-q)^{k-1-i} f(\mu^i) \\ &= q f(\mu^k) + q \sum_{i=0}^{k-1} (1-q)^{k-i} f(\mu^i) = q \sum_{i=0}^k (1-q)^{k-i} f(\mu^i). \end{aligned}$$

$\rho$  ist tatsächlich eine Verteilung, da  $\rho(\mu^k) \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$  und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho(\mu^k) = \sum_{k=0}^{\infty} q \sum_{i=0}^k (1-q)^{k-i} f(\mu^i) = q \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k (1-q)^{k-i} f(\mu^i)$$

$$\stackrel{(*)}{=} q \left( \sum_{i=0}^{\infty} f(\mu^i) \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^k \right) = q \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 - (1-q)} = 1.$$

Dabei gilt  $(*)$  mit  $a_i = f(\mu^i)$  und  $b_{k-i} = (1-q)^{k-i}$  nach dem Satz von Mertens, Lemma 2.34.  $\square$

Es stellt sich nun heraus, daß sogar eine fast Powerlaw-förmige Dichte  $f$  für den Reset-Level notwendig (und hinreichend) ist, um ein asymptotisches Powerlaw für die Markovkette zu erreichen.

**Satz 2.36** *Die oben eingeführte Markovkette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  erfüllt genau dann asymptotisch ein Powerlaw, falls  $f(\mu^k) = qf(1)(1-f(1))(1-af(1))^{k-1} \forall k \in \mathbb{N}$  gilt, wobei  $f(1) \in (0, 1]$ .*

**Beweis:**  $\rho$  erfüllt ein asymptotisches Powerlaw

$$\begin{aligned} &\stackrel{2.35}{\Leftrightarrow} \exists \alpha \in \mathbb{R} : q \sum_{j=0}^k (1-q)^{k-j} f(\mu^j) = (1-\mu^{-\alpha})(\mu^k)^{-\alpha} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : qf(1) = 1 - \mu^{-\alpha} \quad (k=0) \\ &\wedge q \sum_{j=0}^k (1-q)^{k-j} f(\mu^j) = qf(1)(1-af(1))^k \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\stackrel{q \in (0,1)}{\Leftrightarrow} \exists \alpha \in \mathbb{R} : qf(1) = 1 - \mu^{-\alpha} \\ &\wedge f(\mu^k) = f(1)(1-af(1))^k - \sum_{j=0}^{k-1} (1-q)^{k-j} f(\mu^j) \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \exists \alpha \in \mathbb{R} : qf(1) = 1 - \mu^{-\alpha} \\ &\wedge f(\mu^k) = qf(1)(1-f(1))(1-af(1))^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zum Beweis von  $(*)$ : Da die obere Formel eine rekursive Folge definiert, ist die Folge, die diese Rekursionsformel erfüllt, eindeutig bestimmt (Analysis). Beweis des Erfüllens der Rekursionsformel durch vollständige Induktion:  
 IA:  $k = 1$ :  $f(\mu) = f(1)(1-af(1)) - (1-q)^{1-0} f(1) = qf(1)(1-f(1))(1-af(1))^0$   
 IV: Sei  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$  und die Formel gelte für alle  $1 \leq j \leq k-1$ .

$$\begin{aligned} \text{IS: } f(\mu^k) &= f(1)(1-af(1))^k - \sum_{j=0}^{k-1} (1-q)^{k-j} f(\mu^j) \\ &\stackrel{IV}{=} f(1)(1-af(1))^k - (1-q)^k f(1) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-1} (1-q)^{k-j} qf(1)(1-f(1))(1-af(1))^{j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(1) \left\{ (1 - qf(1))^k - (1 - q)^k \right. \\
&\quad \left. - q(1 - f(1))(1 - q)^{k-1} \sum_{j=0}^{k-2} \left( \frac{1 - qf(1)}{1 - q} \right)^j \right\} \\
&= f(1) \left\{ (1 - qf(1))^k - (1 - q)^k \right. \\
&\quad \left. - q(1 - f(1))(1 - q)^{k-1} \frac{1 - \left( \frac{1 - qf(1)}{1 - q} \right)^{k-1}}{1 - \frac{1 - qf(1)}{1 - q}} \right\} \\
&= f(1) \left\{ (1 - qf(1))^k - (1 - q)^k \right. \\
&\quad \left. - q(1 - f(1)) \frac{(1 - q)^{k-1} - (1 - qf(1))^{k-1}}{(1 - q) - (1 - qf(1))} (1 - q) \right\} \\
&= f(1) \left\{ (1 - qf(1))^k - (1 - q)^k + (1 - q)^k - (1 - q)(1 - qf(1))^{k-1} \right\} \\
&= qf(1)(1 - f(1))(1 - qf(1))^{k-1}
\end{aligned}$$

Damit ist  $f$  von der Form

$$\begin{aligned}
f(\mu^0) &= a \\
f(\mu^k) &= qa(1 - a)(1 - qa)^{k-1} = \frac{qa(1 - a)}{1 - qa} (\mu^k)^{\log_{\mu}(1 - qa)} \quad \forall k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

also selbst ein Powerlaw außerhalb von  $\{1\}$ .

$f$  ist genau dann eine Zähldichte, falls  $f(1) = a \in (0, 1]$ , da dann  $f(\mu^k) \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$  und

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} f(\mu^k) &= a + \sum_{k=1}^{\infty} qa(1 - a)(1 - qa)^{k-1} = a + qa(1 - a) \sum_{k=0}^{\infty} (1 - qa)^k \\
&\stackrel{aq \in (0, 1)}{=} a + qa(1 - a) \frac{1}{1 - (1 - qa)} = a + qa(1 - a) \frac{1}{qa} = 1.
\end{aligned}$$

Für  $f(1) = 0$  hingegen folgt  $f(\mu^k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und offensichtlich ist dann die Normierungsbedingung der Dichte verletzt.  $\square$

**Beispiel 2.37** *Ist  $f(1) = 1$ , und somit  $f(\mu^k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so reduziert sich das Modell zu Fall 2.2, von dem das Powerlaw-Verhalten bereits bekannt war.*

Offensichtlich ist Konvergenz gegen ein Powerlaw also auch hier von der Verteilung des Resetlevels abhängig. Allerdings ist in obigem Modell die Verteilung des Resetlevels  $n_0$  im allgemeinen auch nicht nur innerhalb eines beschränkten Gebietes „nennenswert von Null verschieden“, wie dies von Manrubia und Zanette vorausgesetzt wurde - wenn auch unklar bleibt, was dieses „nennenswert“ bedeuten soll.

# 3 Das Modell als homogene Markovkette mit stetigem Zustandsraum

In diesem Kapitel werden stochastische Prozesse der Form (1.1) mit stetigem Zustandsraum formal als Markovketten eingeführt und untersucht. Zunächst werden in Abschnitt 3.1 die benötigten Grundlagen zur Behandlung homogener Markovketten mit stetigem Zustandsraum vorgestellt. In Abschnitt 3.2 wird die Markovkette formal definiert und in Abschnitt 3.3 werden einige grundlegende Eigenschaften der Markovkette nachgewiesen, die in sich selbst interessant sowie für die anschließenden Ergodizitäts- und Konvergenzaussagen in Abschnitt 3.4 wichtig sind. In Abschnitt 3.5 wird der Zusammenhang zwischen den vorgestellten multiplikativen Markovketten und additiven Markovketten, insbesondere sogenannten Random Walks, untersucht. Die beiden Abschnitte 3.6 und 3.7 behandeln dann Markovketten mit konkreten Verteilungen für den multiplikativen Faktor  $\mu$ . Dabei ist die Gleichverteilung ein Beispiel für eine Verteilung mit beschränktem Träger, während die Exponentialverteilung ein Beispiel für eine Verteilung mit unbeschränktem Träger ist.

## 3.1 Grundlagen homogener Markovketten mit stetigem Zustandsraum

Dieser Abschnitt soll die Grundlagen für die Behandlung homogener Markovketten mit stetigem Zustandsraum legen. Er beinhaltet eine Zusammenstellung wichtiger Resultate aus Meyn und Tweedie, [10].

Im folgenden seien stets  $X$  eine beliebige Menge und  $\mathcal{B}(X)$  eine separable  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ . Zugrundegelegt sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$ .

**Definition 3.1** Sei  $P = \{P(x, A), x \in X, A \in \mathcal{B}(X)\}$  gegeben.  $P$  heißt ein **Übergangswahrscheinlichkeitskern** (kurz: **Übergangskern**) oder eine **Markov-Übergangsfunktion**, falls

- (i)  $P(\cdot, A)$  für jedes  $A \in \mathcal{B}(X)$  eine nicht-negative meßbare Funktion auf  $X$  ist;
- (ii) für jedes  $x \in X$   $P(x, \cdot)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(X)$  ist.

Ein **substochastischer Übergangskern**  $T$  erfüllt (i) und (ii) mit der Ausnahme, daß statt  $T(x, X) = 1$  nur  $T(x, X) \leq 1 \forall x$  gilt.

**Satz 3.2** Für jedes (Anfangs-)Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(X)$  und jeden Übergangskern  $P = \{P(x, A), x \in X, A \in \mathcal{B}(X)\}$  gibt es einen stochastischen Prozeß  $\Phi = \{\Phi_0, \Phi_1, \dots\}$  auf  $\Omega = X^\infty = \prod_{i=0}^{\infty} X_i, X_i = X \forall i$ , meßbar bezüglich  $\mathcal{F} := \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(X_i)$ , und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_\mu(B)$  auf  $\mathcal{F}$ , so daß  $P_\mu(B)$  die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{\Phi \in B\}$  für  $B \in \mathcal{F}$  ist, und für meßbare  $A_i \subseteq X_i, i = 0, \dots, n$ , und jedes  $n$  gilt

$$\begin{aligned} P_\mu(\Phi_0 \in A_0, \Phi_1 \in A_1, \dots, \Phi_n \in A_n) \\ = \int_{y_0 \in A_0} \dots \int_{y_{n-1} \in A_{n-1}} \mu(dy_0) P(y_0, dy_1) \dots P(y_{n-1}, A_n). \end{aligned} \quad (3.1)$$

**Beweis:** Theorem 3.4.1 in Meyn und Tweedie, [10].

Somit können Markovketten über ihren Übergangskern  $P$  definiert werden.

**Bemerkung 3.3** Es wird die Schreibweise  $P(x, dy)$  benutzt, wenn nach dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P(x, \cdot)$  integriert wird. Dies soll der Verdeutlichung dienen, da  $P(x, A)$  von  $x \in X$  und  $A \in \mathcal{B}(X)$  abhängt. In diesem Kontext wird auch die unübliche Integrationsreihenfolge von rechts nach links benutzt, da so die Bezüge zwischen den Integrationsvariablen deutlicher werden. Für ein einfaches Maß  $\mu$  wird die Notation im gleichen Zusammenhang hieran angepaßt, jedoch ansonsten die üblichere Schreibweise  $d\mu(y)$  sowie die gebräuchlichere Integrationsreihenfolge von innen nach außen benutzt.

**Definition 3.4** Der stochastische Prozeß  $\Phi$ , definiert auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , heißt eine **Zeit-homogene Markovkette** mit Übergangskern  $P(x, A)$  und Anfangsverteilung  $\mu$ , wenn die endlich-dimensionalen Verteilungen von  $\Phi$  für jedes  $n$  (3.1) erfüllen.

Im folgenden werden nur Zeit-homogene Markovketten betrachtet.  $\Phi$  sei stets eine Zeit-homogene Markovkette mit Zustandsraum  $X$ .

Der  $n$ -Schritt-Übergangskern  $P^n$  wird analog zur  $n$ -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix für den diskreten Fall definiert.

Dazu wird ein Hilfssatz benötigt:

**Lemma 3.5** Das Dirac-Maß

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \quad A \in \mathcal{B}(X),$$

für ein  $x \in X$  definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(X)$ .

Für meßbare Funktionen  $f$  gilt

$$\int f d\delta_x = f(x).$$

**Beweis:** (a)  $\delta_x(\emptyset) = 0$ , da  $x \notin \emptyset$ .

(b) Offensichtlich ist  $\delta_x \geq 0$ .

(c) Sei  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge disjunkter Mengen aus  $\mathcal{B}$ . Dann gilt

$$\delta_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\text{disj.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n).$$

(d)  $\delta_x(X) = 1$ , da  $x \in X$ .

Der Rest der Behauptung entstammt Werner, [12], Beispiel (b), S. 464.  $\square$

Für  $\delta_x$  als Anfangsmaß wird die Bezeichnung  $P_x := P_{\delta_x}$  benutzt.

**Definition 3.6** Der  $n$ -Schritt-Übergangskern wird iterativ definiert.

Setze  $P^0(x, A) = \delta_x(A)$ . Für  $n \geq 1$  definiere iterativ

$$P^n(x, A) = \int_X P(x, dy) P^{n-1}(y, A), \quad x \in X, A \in \mathcal{B}(X)$$

und schreibe  $P^n$  für den  **$n$ -Schritt-Übergangskern**

$\{P^n(x, A), x \in X, A \in \mathcal{B}(X)\}$ .

Tatsächlich ist  $P^n$  ein Übergangskern, wie sich mit  $P^1(x, A) = P(x, A)$  und vollständiger Induktion leicht zeigen läßt, und der  $m$ -Schritt-Übergangskern definiert eine Markovkette  $\Phi^m = \{\Phi_n^m\}$  mit Übergangswahrscheinlichkeiten  $P_x(\Phi_n^m \in A) = P^{mn}(x, A)$ .

Analog zum diskreten Fall gilt für den  $n$ -Schritt-Übergangskern die Chapman-Kolmogorov-Gleichung.

**Satz 3.7** (Chapman-Kolmogorov-Gleichung) Für jedes  $m$  mit  $0 \leq m \leq n$  gilt

$$P^n(x, A) = \int_X P^m(x, dy) P^{n-m}(y, A), \quad x \in X, A \in \mathcal{B}(X).$$

**Beweis:** Theorem 3.4.2 in Meyn und Tweedie, [10].

Diese Gleichung kann man so interpretieren, daß  $\Phi$ , wenn es sich in  $n$  Schritten von  $x$  nach  $A$  bewegt, zu jeder Zwischenzeit  $m$  einen Wert  $y \in X$  annehmen muß; und da  $\Phi$  eine Markovkette ist, vergißt es zum Zeitpunkt  $m$  die Vergangenheit und bewegt sich in den folgenden  $(n - m)$  Schritten nach den Gesetzen eines Neustarts in  $y$ .

Der folgende Satz zeigt, dass sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten tatsächlich analog verhalten zur aus dem diskreten Fall bekannten Markovkeigenschaft und Homogenität.

**Satz 3.8** Sei  $\Phi$  eine Zeit-homogene Markovkette auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  mit Anfangswahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  und Übergangskern  $P$ . Dann gilt

(a) Ist  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und meßbar, so ist

$$\mathbb{E}_\mu[h(\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \dots) | \Phi_0, \dots, \Phi_n; \Phi_n = x] = \mathbb{E}_x[h(\Phi_1, \Phi_2, \dots)].$$

(b)  $\mathbb{P}_\mu(\Phi_{n+1} \in A | \Phi_0, \dots, \Phi_n; \Phi_n = x) = P(x, A) \forall A \in \mathcal{B}(X)$

**Beweis:** (a) Proposition 3.4.3 in Meyn und Tweedie, [10].

(b) Sei  $A \in \mathcal{B}(X)$ . Sei  $h(\Phi_j, \Phi_{j+1}, \dots) := \mathbb{1}(\{\Phi_j \in A\})$ . Dann ist  $h$  beschränkt und meßbar. Mit (a) folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu(\Phi_{n+1} \in A | \Phi_0, \dots, \Phi_n; \Phi_n = x) &= \mathbb{E}_\mu[h(\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \dots) | \Phi_0, \dots, \Phi_n; \Phi_n = x] \\ &\stackrel{(a)}{=} \mathbb{E}_x[h(\Phi_1, \Phi_2, \dots)] = \mathbb{P}_x(\Phi_1 \in A) \stackrel{(3.1)}{=} P(x, A). \end{aligned}$$

□

Es folgen einige Definitionen und Sätze zu grundlegenden Eigenschaften von Markovketten. Einige Konzepte sind in etwas anderer Form von Markovketten mit diskretem Zustandsraum bekannt. Es sind jedoch im stetigen Fall auch zusätzliche Konzepte nötig.

**Definition 3.9** Für jede Menge  $A \in \mathcal{B}(X)$  seien die folgenden Größen definiert:

- (i)  $\eta_A := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\Phi_n \in A\}$ , die **Aufenthaltszeit**, d.h. die Anzahl der Besuche von  $\Phi$  auf  $A$  nach dem Zeitpunkt 0.
- (ii)  $\tau_A := \min\{n \geq 1 : \Phi_n \in A\}$  die **erste Rückkehrzeit** von  $\Phi$  auf  $A$ .
- (iii)  $L(x, A) := \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty) = \mathbb{P}_x(\Phi \text{ besucht jemals } A), x \in X$ , die **Rückkehrwahrscheinlichkeiten** von  $\Phi$  auf  $A$ .
- (iv)  ${}_A P^n(x, B) := \mathbb{P}_x(\Phi_n \in B, \tau_A \geq n), x \in X, B \in \mathcal{B}(X)$ , die **n-Schritt Tabu-Wahrscheinlichkeiten**.

**Bemerkung 3.10**  $\tau_A$  ist nach Proposition 3.4.4, Meyn und Tweedie, [10], für jedes  $A \in \mathcal{B}(X)$  eine Stopzeit, d.h. für jede Anfangsverteilung  $\mu$  ist das Ereignis  $\{\tau_A = n\} \in \mathcal{F}_n^\Phi = \sigma(\Phi_0, \dots, \Phi_n) \subseteq \mathcal{B}(X^{n+1})$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .  $L(x, A)$  und  ${}_A P^n(x, B)$  sind somit wohldefiniert.

**Definition 3.11** Eine Markovkette  $\Phi = \{\Phi_n\}$  heißt  **$\varphi$ -irreduzibel**, wenn es ein Maß  $\varphi$  auf  $\mathcal{B}(X)$  gibt, so daß immer, wenn  $\varphi(A) > 0$  gilt, auch  $L(x, A) > 0$  gilt für alle  $x \in X$ .

Bei abzählbarem Zustandsraum wird der Ausdruck „irreduzibel“ benutzt, wenn alle Zustände miteinander kommunizieren. In diesem Fall ist ausgeschlossen, daß der Zustandsraum in mehrere disjunkte Teilmengen zerfällt, die nicht oder nur eingeschränkt voneinander erreichbar sind. Die  $\varphi$ -Irreduzibilität ist eine Erweiterung und Abschwächung des Konzepts. Immerhin garantiert sie, daß „große“ Mengen (gemessen durch  $\varphi$ ) unabhängig vom Ausgangspunkt der Kette mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden können - insofern kann der Zustandsraum nicht in mehrere „reduzierte“ Teilmengen zerfallen.

**Satz 3.12** *Ist  $\Phi$   $\varphi$ -irreduzibel für ein Maß  $\varphi$ , so existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\psi$  auf  $\mathcal{B}(X)$ , so daß gilt*

- (i)  $\Phi$  ist  $\psi$ -irreduzibel;
- (ii) für jedes andere Maß  $\varphi'$  ist die Kette  $\Phi$  genau dann  $\varphi'$ -irreduzibel, wenn  $\psi \succ \varphi'$  gilt ( $\psi$  dominiert  $\varphi'$ ), d.h. wenn aus  $\psi(A) = 0$  für ein  $A \in \mathcal{B}(X)$  immer  $\varphi'(A) = 0$  folgt;
- (iii) wenn  $\psi(A) = 0$  gilt, dann auch  $\psi(\{y : L(y, A) > 0\}) = 0$ ;
- (iv) das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\psi$  ist äquivalent zu

$$\psi'(A) := \int_X K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A) d\varphi'(y),$$

für jedes endliche Irreduzibilitätsmaß  $\varphi'$ , wobei

$$K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A) 2^{-(n+1)}, \quad x \in X, A \in \mathcal{B}(X). \quad (3.2)$$

**Beweis:** Theorem 4.2.2 in Meyn und Tweedie, [10].

**Definition 3.13** *Die Markovkette heißt  $\psi$ -irreduzibel, wenn sie  $\varphi$ -irreduzibel ist für ein Maß  $\varphi$ , und das Maß  $\psi$  ein **maximales Irreduzibilitätsmaß** ist mit den Eigenschaften aus Satz 3.12.*

$\mathcal{B}^+(X) := \{A \in \mathcal{B}(X) : \psi(A) > 0\}$  bezeichne die Mengen mit positivem  $\psi$ -Maß. Da alle maximalen Irreduzibilitätsmaße nach Eigenschaft (ii) äquivalent sind, ist  $\mathcal{B}^+(X)$  damit eindeutig definiert.

Im Folgenden werden einige Arten von ausgezeichneten Mengen in  $\mathcal{B}(X)$  untersucht. Im untersuchten Modell wird der Resetlevel diese Eigenschaften erfüllen.

**Definition 3.14** *Eine Menge  $B \in \mathcal{B}(X)$  heißt*

- (i) **zugänglich** von einer anderen Menge  $A \in \mathcal{B}(X)$ , falls  $L(x, B) > 0$  für jedes  $x \in A$ ;
- (ii) **gleichmäßig zugänglich** von einer anderen Menge  $A \in \mathcal{B}(X)$ , falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so daß  $\inf_{x \in A} L(x, B) \geq \delta$ .

**Definition 3.15** Eine Menge  $\alpha \in \mathcal{B}(X)$  heißt ein **Atom** für  $\Phi$ , wenn es ein Maß  $\nu$  auf  $\mathcal{B}(X)$  gibt, so daß  $P(x, A) = \nu(A)$ ,  $x \in \alpha$ .  
Ist  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel und  $\psi(\alpha) > 0$ , so heißt  $\alpha$  ein **zugängliches Atom**.

Nach Definition der  $\psi$ -Irreduzibilität ist ein zugängliches Atom insbesondere auch zugänglich von ganz  $X$ .

**Definition 3.16** Eine Menge  $C \in \mathcal{B}(X)$  heißt eine **kleine Menge**, wenn es ein  $m > 0$  gibt und ein nicht-triviales Maß  $\nu_m$  auf  $\mathcal{B}(X)$ , so daß für alle  $x \in C, B \in \mathcal{B}(X)$  gilt  
$$P^m(x, B) \geq \nu_m(B).$$
 $C$  heißt dann  $\nu_m$ -klein.

**Definition 3.17** Sei  $\{a(n)\}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{N}_0$  (die **Sample-Verteilung**) und sei  $\Phi_a$  die Markovkette mit Übergangskern

$$K_a(x, A) := \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A) a(n), \quad x \in X, A \in \mathcal{B}(X).$$

$\Phi_a$  heißt dann eine **Sample-Kette**. (Offensichtlich ist  $K_a$  tatsächlich ein Übergangskern und somit ist  $\Phi_a$  wohldefiniert nach Satz 3.2)  
Eine Menge  $C \in \mathcal{B}(X)$  heißt  $\nu_a$ -**petit**, falls die Sample-Kette die Ungleichung

$$K_a(x, B) \geq \nu_a(B)$$

erfüllt für alle  $x \in C, B \in \mathcal{B}(X)$ , wobei  $\nu_a$  ein nicht-triviales Maß auf  $\mathcal{B}(X)$  ist.

Man kann  $\Phi_a$  als die Kette  $\Phi$  interpretieren, die zu den von der Verteilung  $a$  vorgegebenen Zeitpunkten „gesampelt“ („gezogen“, „abgetastet“, „als Stichprobe genommen“) wird.

**Satz 3.18** Ist  $C \in \mathcal{B}(X)$   $\nu_m$ -klein, so ist  $C$   $\nu_{\delta_m}$ -petit, wobei  $\delta_m$  für das Dirac-Maß auf  $\mathbb{N}_0$  steht mit  $\delta_m(m) = 1$ , also  $K_{\delta_m} = P^m$ .

**Beweis:** Proposition 5.5.3 in Meyn und Tweedie, [10].

**Satz 3.19** Sei  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel. Ist  $C \in \mathcal{B}^+(X)$   $\nu_n$ -klein, so gibt es ein  $M \in \mathbb{N}_0$  und ein Maß  $\nu_M$ , so daß  $C$   $\nu_M$ -klein ist und  $\nu_M(C) > 0$ .

**Beweis:** Proposition 5.2.4 (iii) in Meyn und Tweedie, [10].

**Definition 3.20** Sei  $\Phi$   $\varphi$ -irreduzibel. Sei  $C \in \mathcal{B}(X)$   $\nu_M$ -klein und  $\nu_M(C) > 0$  (o.B.d.A. nach Satz 3.19). Sei

$E_C = \{n \geq 1 : \text{die Menge } C \text{ ist } \nu_n\text{-klein, mit } \nu_n = \delta_n \nu_M \text{ f\u00fcr ein } \delta_n > 0\}$ .

Definiere  $d_C = \text{ggT}\{n : n \in E_C\}$ .

$d = \min\{d_C | C \in \mathcal{B}(X), \exists M : C \nu_M\text{-klein und } \nu_M(C) > 0\}$  hei\u00dft die **Periode** von  $\Phi$ .

Ist  $d = 1$ , so hei\u00dft  $\Phi$  **aperiodisch**.

Gibt es eine  $\nu_1$ -kleine Menge  $A$  mit  $\nu_1(A) > 0$ , so hei\u00dft die Kette **stark aperiodisch**.

Der folgende Satz verdeutlicht, warum die Bezeichnung „aperiodisch“ in Analogie zum diskreten Fall hier gew\u00e4hlt wurde.

**Satz 3.21** Sei  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel. Sei  $C \in \mathcal{B}^+(X)$  eine  $\nu_M$ -kleine Menge und  $d_C = \text{ggT}\{n : n \in E_C\}$ . Dann gibt es disjunkte Mengen  $D_1, \dots, D_{d_C} \in \mathcal{B}(X)$  (ein „ $d_C$ -Zyklus“), so da\u00df

(i) f\u00fcr  $x \in D_i$ ,  $P(x, D_{i+1}) = 1, i = 0, \dots, d_C - 1 \pmod{d_C}$  gilt;

(ii) die Menge  $N = \left(\bigcup_{i=1}^{d_C} D_i\right)^C$  eine  $\psi$ -Nullmenge ist.

Der  $d_C$ -Zyklus  $\{D_i\}$  ist maximal in dem Sinne, da\u00df f\u00fcr jede andere Zusammensetzung  $\{d', D'_k, k = 1, \dots, d'\}$  mit (i) und (ii)  $d' d_C$  teilt; falls jedoch  $d' = d_C$ , so gilt mit Umordnung der Indizes  $D_i = D'_i \psi$ -f. \u00f6.

**Beweis:** Theorem 5.4.4 in Meyn und Tweedie, [10].

**Definition 3.22** Eine Menge  $A$  hei\u00dft **rekurrent**, falls  $E_x[\eta_A] = \infty$  f\u00fcr alle  $x \in A$ .  $A$  hei\u00dft **gleichm\u00e4\u00dfig transient**, falls es ein  $M < \infty$  gibt, so da\u00df  $E_x[\eta_A] \leq M$  f\u00fcr alle  $x \in A$ . Kann  $A \in \mathcal{B}(X)$  mit einer endlichen Anzahl gleichm\u00e4\u00dfig transienter Mengen \u00fcberdeckt werden, so hei\u00dft  $A$  **transient**.

**Satz 3.23** Sei  $\Phi$  eine  $\psi$ -irreduzible Markovkette mit einem Atom  $\alpha \in \mathcal{B}^+(X)$ . Ist  $\alpha$  rekurrent, so ist jede Menge in  $\mathcal{B}^+(X)$  rekurrent.

**Beweis:** Theorem 8.2.1 in Meyn und Tweedie, [10].

**Definition 3.24**

(i) Die Kette  $\Phi$  hei\u00dft **rekurrent**, falls  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel ist und  $E_x[\eta_A] \equiv \infty$  f\u00fcr jedes  $x \in X$  und jedes  $A \in \mathcal{B}^+(X)$ .

(ii) Die Kette  $\Phi$  hei\u00dft **transient**, falls  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel und  $X$  transient ist.

**Definition 3.25** Eine Menge  $A$  hei\u00dft **Harris-rekurrent**, wenn gilt

$$P_x(\eta_A = \infty) = 1, \quad x \in A.$$

Eine Kette  $\Phi$  hei\u00dft **Harris-rekurrent** oder einfach **Harris-Kette**, wenn sie  $\psi$ -irreduzibel ist und jede Menge in  $\mathcal{B}^+(X)$  Harris-rekurrent ist.

**Satz 3.26** *Ist  $\Phi$  Harris-rekurrent, so gilt  $P_x(\eta_A = \infty) = 1$  für jedes  $x \in X$  und jedes  $A \in \mathcal{B}^+(X)$ .*

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß  $\Phi$  unendlich oft  $A$  besucht, gleich eins nicht nur für einen Start in  $A$ , sondern für einen Start in einem beliebigen Zustand  $x \in X$ .

Dieser Satz macht auch deutlich, daß Harris-Rekurrenz stärker ist als einfache Rekurrenz - die Zahl der Besuche auf einer Menge in  $\mathcal{B}^+(X)$  ist nicht nur im Erwartungswert, sondern sogar fast sicher unendlich für einen Start in einem beliebigen  $x \in X$ .

**Satz 3.27** *Sei  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel. Gibt es eine petite Menge  $C \in \mathcal{B}(X)$ , so daß  $L(x, C) \equiv 1, x \in X$ , so ist  $\Phi$  Harris-rekurrent.*

**Beweis:** Theorem 9.1.7, Teil (ii), aus Meyn und Tweedie, [10].

Analog zum diskreten Fall sind auch hier wieder die invarianten Maße Kandidaten für eine asymptotische Verteilung der Markovkette.

### Definition 3.28

(i) Ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\pi$  auf  $\mathcal{B}(X)$  heißt **invariant** für  $\Phi$ , falls gilt:

$$\pi(A) = \int_X P(x, A) d\pi(x), \quad A \in \mathcal{B}(X). \quad (3.3)$$

(ii) Ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(X)$  heißt **subinvariant** für  $\Phi$ , falls gilt:

$$\mu(A) \geq \int_X P(x, A) d\mu(x), \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

**Satz 3.29** *Sei  $\Phi$  eine  $\psi$ -irreduzible Markovkette mit einem zugänglichen Atom  $\alpha$ . Dann gibt es immer ein subinvariantes Maß  $\mu_\alpha$  für  $\Phi$ , gegeben durch*

$$\mu_\alpha(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha P^n(\alpha, A), \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

$\mu_\alpha$  ist genau dann invariant, wenn  $\Phi$  rekurrent ist.

**Beweis:** Theorem 10.2.1 (i) aus Meyn und Tweedie, [10].

**Satz 3.30** *Ist  $\Phi$  rekurrent, so hat  $\Phi$  ein (bis auf konstante Vielfache) eindeutiges subinvariantes Maß, und dieses ist invariant.*

**Beweis:** Theorem 10.4.4 aus Meyn und Tweedie, [10].

**Definition 3.31** Ist  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel und hat ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$ , so heißt  $\Phi$  eine **positive Kette**.

Ist  $\Phi$  Harris-rekurrent und positiv, so ist  $\Phi$  eine **positive Harris-Kette**.

**Satz 3.32** Sei  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel und sei  $\mu$  ein subinvariantes Maß für  $\Phi$ .  $\mu$  ist endlich und  $\Phi$  positiv rekurrent, falls für eine petite Menge  $C \in \mathcal{B}^+(X)$  gilt:

$$\sup_{y \in C} E_y[\tau_C] < \infty.$$

**Beweis:** Theorem 10.4.10 (ii) aus Meyn und Tweedie, [10].

Sei im folgenden  $X$  ausgestattet mit einer lokal kompakten, separablen, metrisierbaren Topologie mit  $\mathcal{B}(X)$  als Borelscher  $\sigma$ -Algebra. (Dies ist z.B. erfüllt für  $X = \mathbb{R}$ .)

**Definition 3.33**

(i) Eine Funktion  $h$  von  $X$  nach  $\mathbb{R}$  heißt **von unten halbstetig**, falls

$$\liminf_{y \rightarrow x} h(y) \geq h(x), \quad x \in X.$$

(ii) Ist  $a$  eine Sample-Verteilung und gibt es einen substochastischen Kern  $T$ , so daß für die Sample-Kette  $K_a$  gilt

$$K_a(x, A) \geq T(x, A), \quad x \in X, A \in \mathcal{B}(X),$$

wobei  $T(\cdot, A)$  für jedes  $A \in \mathcal{B}(X)$  eine von unten halbstetige Funktion ist, so heißt  $T$  eine **stetige Komponente** von  $K_a$ .

(iii) Ist  $\Phi$  eine Markovkette, für die eine Sample-Verteilung  $a$  existiert, so daß  $K_a$  eine stetige Komponente  $T$  besitzt mit  $T(x, X) > 0$  für alle  $x$ , so heißt  $\Phi$  eine **T-Kette**.

**Definition 3.34** Ein Punkt  $x \in X$  heißt **erreichbar**, falls für jede offene Umgebung  $O \in \mathcal{B}(X)$  von  $x$  gilt

$$\sum_n P^n(y, O) > 0, \quad y \in X.$$

Nun folgen einige Definitionen und Aussagen zum asymptotischen Verhalten der Markovkette.

**Definition 3.35** Eine Markovkette  $\Phi$  heißt **nicht-evaneszent (nicht-verschwindend)**, falls

$$P_x(\{\Phi \rightarrow \infty\}) = 0 \text{ für jedes } x \in X.$$

Dabei bedeutet  $\{\Phi \rightarrow \infty\}$ , daß die Kette jede kompakte Menge nur endlich oft besucht.

**Bemerkung 3.36** Da das Ereignis  $\{\Phi \rightarrow \infty\} \in \mathcal{F}$  ist (siehe Seite 207, [10]), ist die Nichtevanescenz wohldefiniert.

**Definition 3.37** Eine Markovkette  $\Phi$  heißt **beschränkt in Wahrscheinlichkeit**, wenn es zu jedem Anfangszustand  $x \in X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Teilmenge  $C \subset X$  gibt, so daß

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(\{\Phi_k \in C\}) \geq 1 - \varepsilon.$$

**Satz 3.38** Sei  $\Phi$  eine homogene Markovkette auf einem topologischen Raum und es existiere ein erreichbarer Zustand  $x^* \in X$ . Ist  $\Phi$  eine T-Kette und eine positive Harris-Kette, so ist  $\Phi$  nicht-evaneszent und beschränkt in Wahrscheinlichkeit.

**Beweis:** Theorem 18.0.2 (i) in Meyn und Tweedie, [10]

**Definition 3.39** Die **totale Variationsnorm**  $\|\mu\|$  für ein signiertes Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(X)$  sei definiert als

$$\|\mu\| := \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A).$$

**Satz 3.40**  $\|\cdot\|$  definiert eine Norm auf dem Vektorraum der signierten Maße.

**Beweis:** Offensichtlich ist die Menge der signierten Maße ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , da sie abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation, das triviale Maß  $\mu$  mit  $\mu(A) = 0 \forall A \in \mathcal{B}(X)$  und zu jedem signierten Maß  $\mu$  auch  $-\mu$  enthalten ist.

Seien  $\mu$  und  $\nu$  signierte Maße auf  $\mathcal{B}(X)$ . Dann gilt

$$(1) \left. \begin{array}{l} \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0 \\ \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) \leq \mu(\emptyset) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \|\mu\| \geq 0 - 0 = 0.$$

$$(2) \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0 \forall A \in \mathcal{B}(X) \Leftrightarrow \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) = \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) = 0 \\ \Leftrightarrow \|\mu\| = 0, \text{ da } \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A), - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) \geq 0 \text{ nach (1).}$$

(3) 1. Fall: Sei  $\alpha \geq 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha\mu\| &= \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} (\alpha\mu(A)) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} (\alpha\mu(A)) \\ &= \alpha \left( \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) \right) = \alpha \|\mu\| = |\alpha| \|\mu\|. \end{aligned}$$

2. Fall: Sei  $\alpha < 0$ . Dann gilt

$$\|\alpha\mu\| = \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} (\alpha\mu(A)) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} (\alpha\mu(A))$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} (-|\alpha|\mu(A)) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} (-|\alpha|\mu(A)) \\
&= -|\alpha| \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} (\mu(A)) + |\alpha| \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} (\mu(A)) = |\alpha| \|\mu\|.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ :  $\|\alpha\mu\| = |\alpha| \|\mu\|$ .

$$\begin{aligned}
(4) \|\mu + \nu\| &= \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} (\mu(A) + \nu(A)) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} (\mu(A) + \nu(A)) \\
&\leq \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) + \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} \nu(A) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} \nu(A) \\
&= \|\mu\| + \|\nu\|.
\end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften (1)-(4) ist  $\|\cdot\|$  nach Definition eine Norm. □

**Satz 3.41** *Ist  $\Phi$  eine positive Harris-Kette mit invariantem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  und aperiodisch, so gilt für jede Anfangsverteilung  $\lambda$*

$$\| \int P^n(x, \cdot) d\lambda(x) - \pi^* \| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{Ergodizität})$$

**Beweis:** Theorem 13.3.3 aus Meyn und Tweedie, [10].

**Definition 3.42** *Eine ergodische Markovkette  $\Phi$  heißt **gleichmäßig ergodisch**, falls*

$$\sup_{x \in X} \|P^n(x, \cdot) - \pi^*\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

für das invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$ .

**Satz 3.43** *Für jede Markovkette  $\Phi$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\Phi$  ist gleichmäßig ergodisch.
- (ii) Es gibt ein  $r > 1$  und ein  $R < \infty$ , so daß für alle  $x$

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi^*\| \leq Rr^{-n};$$

d.h. die Konvergenz in (3.4) findet mit einer gleichmäßigen geometrischen Rate statt.

- (iii) Die Kette ist aperiodisch und es gibt eine petite Menge  $C$  mit

$$\sup_{x \in X} E_x[\tau_C] < \infty,$$

und in diesem Fall gilt für jede Menge  $A \in \mathcal{B}^+(X)$   $\sup_{x \in X} E_x[\tau_A] < \infty$ .

**Beweis:** Theorem 16.0.2, Teile (i), (ii) und (vi) in Meyn und Tweedie, [10].

## 3.2 Definition der Markovkette und des Übergangskerns

Betrachte nun die Verallgemeinerung des untersuchten Modells auf einen stetigen Zustandsraum. Diese Arbeit wird sich auf die Verallgemeinerung des Falles 2.3 beschränken, d.h. auf den Fall des multiplikativen Faktors als Zufallsvariable, während das Reset auf einen konstanten Level, o.B.d.A auf 1, stattfindet. Gegeben sei der Zustandsraum  $X := \mathbb{R}^{>0}$  mit der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^{>0})$ , der Borelschen  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^{>0}$ . Seien  $\mu, \nu$  Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X$ . Definiere nun  $\Phi$  als Markovkette über das Anfangsmaß  $\nu$  und den unten definierten Übergangskern  $P$ . Nach Satz 3.2 ist  $\Phi$  dann wohldefiniert und  $\Phi = \{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots\}$  eine Markovkette mit Werten in  $X^\infty$ , ausgestattet mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ .

Definiere den Übergangskern  $P$  für die Markovkette mit der Notation  $\frac{A}{x} := \{\frac{y}{x} | y \in A\}$  über

$$\begin{aligned} P & : X \times \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R} \\ P(x, A) & = q\delta_1(A) + (1 - q)\mu\left(\frac{A}{x}\right) \quad \forall x \in X, A \in \mathcal{B}(X), \end{aligned} \tag{3.5}$$

wobei  $\delta_1$  wieder das Dirac-Maß bezeichnen soll.

**Satz 3.44** *Mit der Setzung in (3.5) ist  $P = \{P(x, A), x \in X, A \in \mathcal{B}(X)\}$  ein Übergangskern.*

**Beweis:**

1. Für jedes  $A \in \mathcal{B}(X)$  ist  $P(\cdot, A)$  eine nicht-negative meßbare Funktion auf  $X$ :

Sei  $A \in \mathcal{B}(X)$  fest. Da  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist,  $q \in (0, 1)$  und  $\delta_1(A) \in \{0, 1\}$ , ist  $P(\cdot, A)$  nicht-negativ.

Es ist  $\mu\left(\frac{A}{x}\right) = \int_X \mathbb{1}_{\frac{A}{x}}(y) d\mu(y) = \int_X \mathbb{1}_A(xy) d\mu(y)$ . Die Funktion  $(x, y) \mapsto xy$  ist als stetige Funktion  $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X) - \mathcal{B}(X)$ -meßbar; da  $A \in \mathcal{B}(X)$ , ist  $\mathbb{1}_A(z) \mathcal{B}(X) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -meßbar und somit als Komposition zweier meßbarer Funktionen  $f(x, y) := \mathbb{1}_A(xy)$  auch  $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -meßbar. Da  $f$  nicht-negativ ist, folgt  $f \in \mathcal{M}^+(X \times X, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X))$ .

$\mu$  ist als Wahrscheinlichkeitsmaß  $\sigma$ -endlich. Mit dem Satz von Fubini (Satz V.2.1 a) in Elstrodt, [4]) folgt die  $\mathcal{B}(X) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -Meßbarkeit von  $x \mapsto \mu\left(\frac{A}{x}\right) = \int_X \mathbb{1}_A(xy) d\mu(y) = \int_X f(x, y) d\mu(y)$ . Da  $\delta_1(A)$  für festes  $A$  konstant ist, folgt damit direkt die Meßbarkeit von  $P(\cdot, A)$ .

2. Für jedes  $x \in X$  ist  $P(x, \cdot)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(X)$ :

$$\text{a) } P(x, \emptyset) = q\delta_1(\emptyset) + (1-q)\mu\left(\frac{\emptyset}{x}\right) = 0 + (1-q)\mu(\emptyset) = 0.$$

b)  $P(x, \cdot) \geq 0$ , da  $q \in (0, 1)$ ,  $\delta_1, \mu \geq 0$  als Wahrscheinlichkeitsmaße.

c) Sei  $(A_n)_{n \geq 1}$  eine Folge disjunkter Mengen aus  $\mathcal{B}(X)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(x, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= q\delta_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + (1-q)\mu\left(\frac{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}{x}\right) \\ &\stackrel{\delta_1 \text{Ma\ss}}{=} q \sum_{n=1}^{\infty} \delta_1(A_n) + (1-q)\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{x}\right)\right) \\ &\stackrel{\mu \text{Ma\ss}}{=} q \sum_{n=1}^{\infty} \delta_1(A_n) + (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\frac{A_n}{x}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ q\delta_1(A_n) + (1-q)\mu\left(\frac{A_n}{x}\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(x, A_n). \end{aligned}$$

Mit a) - c) ist  $P(x, \cdot)$  ein Maß (Folgerung 1.3, Elstrodt, [4]).

$$P(x, X) = q\delta_1(X) + (1-q)\mu\left(\frac{X}{x}\right) = q + (1-q)\mu(X) = q + (1-q) = 1.$$

Somit ist  $P(x, \cdot)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Nach Definition ist  $P(\cdot, \cdot)$  mit 1. und 2. ein Übergangskern. □

Wie sieht nun der  $n$ -Schritt-Übergangskern aus? Eine Antwort gibt der folgende Hilfssatz.

**Lemma 3.45** *Der  $n$ -Schritt-Übergangskern  $P^n$  läßt sich schreiben als*

$$\begin{aligned} P^n(x, A) &= q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{n-1} (1-q)^i \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \\ &\quad + (1-q)^n \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{xz_1 \cdot \dots \cdot z_{n-1}}\right) d\mu(z_{n-1}) \dots d\mu(z_1), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dabei seien, wie üblich,  $\prod_{i=1}^0 := 1$  und  $\sum_{i=1}^0 := 0$ .

**Beweis:** Zunächst sind einige Vorüberlegungen zu  $P(x, dy)$  nötig. Setzt man  $\mu_x(A) := \mu(\frac{A}{x})$  für festes  $x \in X$ , so ist  $\mu_x$  (als Bildmaß einer stetigen und somit meßbaren Funktion) ein Maß und es gilt

$$\int \mathbb{1}_A(y) d\mu_x(y) = \mu_x(A) = \mu\left(\frac{A}{x}\right) = \int \mathbb{1}_{\frac{A}{x}}(y) d\mu(y) = \int \mathbb{1}_A(xy) d\mu(y).$$

Mit algebraischer Induktion folgt hieraus

$$\int f(y) d\mu_x(y) = \int f(xy) d\mu(y) \quad (3.6)$$

für alle meßbaren Funktionen  $f$ .

Beweise nun die Behauptung durch vollständige Induktion:

IA:  $n=1$ :  $P^1(x, A) = P(x, A) = q\delta_1(A) + (1-q)\mu(\frac{A}{x})$ .

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , und sei die Aussage wahr für  $n-1$ .

IS: Dann gilt

$$\begin{aligned} P^n(x, A) &\stackrel{Def.}{=} \int_X P(x, dy) P^{n-1}(y, A) \\ &\stackrel{IV}{=} \int_X \left[ q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{n-2} (1-q)^i \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \right. \\ &\quad \left. + (1-q)^{n-1} \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{yz_1 \cdot \dots \cdot z_{n-2}}\right) d\mu(z_{n-2}) \dots d\mu(z_1) \right] \\ &\quad \left[ qd\delta_1(y) + (1-q)d\mu_x(y) \right] \\ &= \left[ q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{n-2} (1-q)^i \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \right] P(x, X) \\ &\quad + q(1-q)^{n-1} \int_X \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{yz_1 \cdot \dots \cdot z_{n-2}}\right) d\mu(z_{n-2}) \dots d\mu(z_1) d\delta_1(y) \\ &\quad + (1-q)^n \int_X \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{yz_1 \cdot \dots \cdot z_{n-2}}\right) d\mu(z_{n-2}) \dots d\mu(z_1) d\mu_x(y) \\ &\stackrel{(3.6)}{=} q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{n-1} (1-q)^i \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \\ &\quad + (1-q)^n \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{xz_1 \cdot \dots \cdot z_{n-1}}\right) d\mu(z_{n-1}) \dots d\mu(z_1). \end{aligned}$$

□

Dies läßt sich wie folgt interpretieren:  $P^n(x, A)$  entspricht der Wahrscheinlichkeit, in  $n$  Schritten von  $x$  nach  $A$  zu gelangen. Dabei entspricht der erste Term der Wahrscheinlichkeit, im  $n$ -ten Schritt durch Erreichen der 1 nach  $A$  zu gelangen. Der letzte Term entspricht der Wahrscheinlichkeit, in  $n$  Schritten ohne Reset nach  $A$  zu gelangen. Die  $z_i$  repräsentieren dabei den multiplikativen Faktor ( $\mu$  aus (1.1)) im  $i$ -ten Schritt, es wird über die verschiedenen Möglichkeiten integriert. Die Terme dazwischen entsprechen der Wahrscheinlichkeit, in  $1 \leq i \leq n - 1$  Schritten ohne Reset von der 1 aus  $A$  zu erreichen, nachdem vorher ein Reset stattgefunden hat.

## 3.3 Grundlegende Eigenschaften der Markovkette

### 3.3.1 Irreduzibilität

**Satz 3.46** Die Markovkette  $\Phi$  ist  $\varphi$ -irreduzibel, wobei

$$\varphi(A) = \delta_1(A) = \begin{cases} 1, & 1 \in A \\ 0, & 1 \notin A \end{cases} \quad \text{für } A \in \mathcal{B}(X).$$

**Beweis:** Nach Lemma 3.5 ist  $\varphi$  ein Maß. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \varphi(A) > 0 \text{ für ein } A \in \mathcal{B}(X) \\ \Rightarrow & \varphi(A) = 1 \Rightarrow 1 \in A \text{ und mit } x \in X \text{ beliebig:} \\ \Rightarrow & L(x, A) = P_x(\tau_A < \infty) = P_x(\min\{n \geq 1 : \Phi_n \in A\} < \infty) \\ & \geq P_x(\Phi_1 \in A) \geq P_x(\Phi_1 = 1) = P(x, \{1\}) \geq q\delta_1(\{1\}) = q > 0 \end{aligned}$$

Somit gilt  $L(x, A) > 0 \forall x \in X$ , wann immer  $\varphi(A) > 0$  für ein  $A \in \mathcal{B}(X)$ . Also ist  $\Phi$   $\varphi$ -irreduzibel.  $\square$

**Folgerung 3.47** Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\psi$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{>0})$ , so daß gilt:

- (1)  $\Phi$  ist  $\psi$ -irreduzibel
- (2) Für jedes andere Maß  $\varphi'$  ist die Markovkette  $\Phi$  genau dann  $\varphi'$ -irreduzibel, wenn  $\psi \succ \varphi'$ ,  
d.h.  $\psi(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$ . [Maximalität von  $\psi$ .]
- (3) Gilt  $\psi(A) = 0$ , so auch  $\psi(\{y : L(y, A) > 0\}) = 0$
- (4) Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\psi$  ist äquivalent zu

$$\psi'(A) := \int_X K_{a_{\frac{1}{2}}}(y, A) d\varphi'(y) \quad (3.7)$$

für jedes endliche Irreduzibilitäts-Maß  $\varphi'$ , wobei

$$K_{a_{\frac{1}{2}}}(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A) 2^{-(n+1)}, \quad x \in X, A \in \mathcal{B}(X). \quad (3.8)$$

**Beweis:** Satz 3.12. □

$\Phi$  ist also  $\psi$ -irreduzibel, wobei  $\psi$  das maximale Irreduzibilitätsmaß bezeichnet.

### 3.3.2 Zugängliches Atom und kleine Menge

**Satz 3.48**  $\{1\} \in \mathcal{B}(X)$  ist gleichmäßig zugänglich von ganz  $X$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} L(x, \{1\}) &= P_x(\tau_{\{1\}} < \infty) = P_x(\min\{n \geq 1 : \Phi_n \in \{1\}\} < \infty) \\ &\geq P_x(\Phi_1 = 1) \geq q > 0 \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Da  $q > 0$  und  $\inf_{x \in X} L(x, \{1\}) \geq q$ , ist  $\{1\}$  gleichmäßig zugänglich von ganz  $X$ . □

**Satz 3.49**  $\{1\}$  ist ein zugängliches Atom für  $\Phi$ .

**Beweis:**  $\{1\} \in \mathcal{B}(X)$  ist ein Atom für  $\Phi$ , da  $\nu(A) := P(1, A) \forall A \in \mathcal{B}(X)$  ein Maß definiert.

Es gilt

$$\begin{aligned} \psi'(\{1\}) &\stackrel{3.47(4)}{=} \int_X \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, \{1\}) 2^{-(n+1)} d\varphi(y) \stackrel{Def.\varphi}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P^n(1, \{1\}) 2^{-(n+1)} \\ &\geq P^1(1, \{1\}) 2^{-2} \geq \frac{1}{4} q \delta_1(\{1\}) = \frac{1}{4} q > 0 \\ \Rightarrow \psi(\{1\}) &> 0, \text{ da } \psi' \text{ und } \psi \text{ äquivalent sind.} \end{aligned}$$

Da  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel und  $\psi(\{1\}) > 0$  ist, ist  $\{1\}$  ein zugängliches Atom. □

Da  $\{1\}$  ein Atom ist, ist es insbesondere auch eine kleine Menge wegen des folgenden Satzes:

**Satz 3.50** Ist  $C$  ein Atom, so ist  $C$  insbesondere eine  $\nu_1$ -kleine Menge.

**Beweis:** Die Behauptung folgt sofort aus der Definition mit  $m = 1$  und  $\nu_m = \nu$ .  $\nu$  ist nicht-trivial, da  $P(x, \cdot)$  für jedes  $x$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}$  ist und somit  $\nu(X) = P(x, X) = 1 \forall x \in C$ . □

**Folgerung 3.51**  $\{1\}$  ist eine  $\nu_1$ -kleine Menge und  $\nu_{\delta_1}$ -petit für  $\Phi$ .

**Beweis:**  $\{1\}$  ist eine kleine Menge nach Satz 3.50 und nach Satz 3.18 petit. □

### 3.3.3 Starke Aperiodizität

**Satz 3.52** Die Markovkette  $\Phi$  ist stark aperiodisch.

**Beweis:** Setze  $C := \{1\}$ . Nach Satz 3.46 ist  $\Phi$   $\varphi$ -irreduzibel. Nach Satz 3.49 und Lemma 3.50 ist  $C$  ein Atom und insbesondere eine  $\nu_1$ -kleine Menge. Zusätzlich ist  $\nu_1(C) = P(1, \{1\}) = q\delta_1(\{1\}) + (1-q)\mu(\{1\}) \geq q\delta_1(\{1\}) = q > 0$ . Es gilt  $1 \in E_C = \{n \geq 1 : C \text{ ist } \nu_n\text{-klein, mit } \nu_n = \delta_n \nu \text{ für ein } \delta_n > 0\}$ . Somit ist  $d_C = \text{ggT}\{n : n \in E_C\} = 1$ . Damit ist auch  $d = 1$ . Somit ist  $\Phi$  aperiodisch, wegen  $\nu_1(C) > 0$  sogar stark aperiodisch.  $\square$

### 3.3.4 Rekurrenz und Harris-Rekurrenz

Für die folgenden Aussagen werden zunächst einige Abschätzungen benötigt.

**Lemma 3.53** Es gilt:

- (a)  $P^n(x, \{1\}) \geq q$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ .
- (b)  $P_x(\Phi_j \neq 1, 1 \leq j \leq n) \leq (1-q)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ .
- (c)  $P_x(\Phi_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}) = 0$ ,  $x \in X$ .

**Beweis:** von (a) durch vollständige Induktion:

IA:  $n = 1$ :  $P^1(x, \{1\}) = q\delta_1(\{1\}) + (1-q)\mu(\frac{\{1\}}{x}) \geq q\delta_1(\{1\}) = q$

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , und die Aussage sei erfüllt für  $n - 1$ .

IS: Dann gilt:

$$P^n(x, \{1\}) = \int_X P(x, dy) P^{n-1}(y, \{1\}) \stackrel{IV}{\geq} \int_X P(x, dy) q = qP(x, X) = q,$$

da  $P(x, \cdot)$  Wahrscheinlichkeitsmaß ist nach Satz 3.44.

von (b) durch vollständige Induktion:

IA:  $n=1$ :  $P_x(\Phi_n \neq 1, 1 \leq j \leq 1) = P_x(\Phi_1 \neq 1) = 1 - P(x, \{1\}) \stackrel{(a)}{\leq} 1 - q$ .

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , und die Aussage sei erfüllt für  $n - 1$ .

IS: Nach Teil (a) ist  $P(x, \{1\}) \geq q$  für alle  $x \in X$ , also  $P(x, \{1\}^C) \leq 1 - q$  für alle  $x \in X$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & P_x(\Phi_j \neq 1, 1 \leq j \leq n) \\ & \stackrel{(3.1)}{=} \int_{y_1 \in \{1\}^C} \dots \int_{y_{n-1} \in \{1\}^C} P(x, dy_1) \dots P(y_{n-2}, dy_{n-1}) P(y_{n-1}, \{1\}^C) \\ & \leq \int_{y_1 \in \{1\}^C} \dots \int_{y_{n-1} \in \{1\}^C} P(x, dy_1) \dots P(y_{n-2}, dy_{n-1}) (1-q) \\ & = (1-q) \int_{y_1 \in \{1\}^C} \dots \int_{y_{n-2} \in \{1\}^C} P(x, dy_1) \dots P(y_{n-2}, \{1\}^C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-q)P_x(\Phi_j \neq 1, 1 \leq j \leq n-1) \stackrel{IV}{\leq} (1-q)(1-q)^{n-1} \\
&= (1-q)^n
\end{aligned}$$

von (c): Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$P_x(\Phi_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}) \leq P_x(\Phi_n \neq 1, 1 \leq n \leq k) \stackrel{(b)}{\leq} (1-q)^k$$

Aus  $(1-q)^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , folgt die Behauptung.  $\square$

Untersuche nun zunächst die Rekurrenz von  $C = \{1\}$ .

**Satz 3.54**  $C = \{1\}$  ist rekurrent.

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
E_x[\eta_C] &= E_x\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\Phi_n = 1\}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E_x[\mathbb{1}\{\Phi_n = 1\}] = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(\{\Phi_n = 1\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, \{1\}) \stackrel{3.53(a)}{\geq} \sum_{n=1}^{\infty} q = \infty \quad \forall x \in X,
\end{aligned}$$

also insbesondere  $\forall x \in C$ .  $\square$

Dies läßt auf die Rekurrenz von ganz  $\mathcal{B}^+(X)$  schließen.

**Satz 3.55** Jede Menge in  $\mathcal{B}^+(X) = \{A \in \mathcal{B}(X) : \psi(A) > 0\}$  ist rekurrent.

**Beweis:** Nach Folgerung 3.47 ist  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel. Nach Satz 3.49 ist  $C$  ein Atom für  $\Phi$  mit  $C \in \mathcal{B}^+(X)$  und nach Satz 3.54 ist  $C$  rekurrent. Mit Satz 3.23 folgt: jede Menge in  $\mathcal{B}^+(X)$  ist rekurrent.  $\square$

Um diese Aussage zur Rekurrenz anschaulicher zu machen, folgt eine Charakterisierung von  $\mathcal{B}^+(X)$ .

**Satz 3.56** Es ist  $\mathcal{B}^+(X) = \{A \in \mathcal{B}(X) : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } P^n(1, A) > 0\}$ .

**Beweis:** Nach Definition ist  $\mathcal{B}^+(X) = \{A \in \mathcal{B}(X) : \psi(A) > 0\}$ . Da jedoch nach (3.7)  $\psi$  und  $\psi'$  äquivalent sind, folgt  $\mathcal{B}^+(X) = \{A \in \mathcal{B}(X) : \psi'(A) > 0\}$ . Nach (3.7) und (3.8) ist

$$\begin{aligned}
\psi'(A) &= \int_X K_{\alpha_{\frac{1}{2}}}(y, A) d\varphi(y) = \int_X \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, A) 2^{-(n+1)} d\delta_1(y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P^n(1, A) 2^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

Damit folgt:  $\psi'(A) > 0 \Leftrightarrow$  es gibt ein  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $P^n(1, A) > 0$ . □

Somit besagt Satz 3.55, daß alle Zustände, die von der 1 aus mit positiver Wahrscheinlichkeit in einer endlichen Zahl von Schritten erreicht werden, rekurrent sind, im Erwartungswert also von der Markovkette  $\infty$ -oft besucht werden. Dies macht Sinn, da die 1 der ausgezeichnete Zustand ist, zu dem die Kette in jedem Schritt mit positiver Wahrscheinlichkeit zurückkehrt.

**Beispiel 3.57** Jede Menge  $A \in \mathcal{B}(X)$  mit  $1 \in A$  ist rekurrent, da dann  $P(1, A) = q\delta_1(A) + (1 - q)\mu(A) \geq q > 0$  gilt. Auch jede Menge mit  $\mu(A) > 0$  ist rekurrent, da  $P(1, A) = q\delta_1(A) + (1 - q)\mu(A) \geq (1 - q)\mu(A) > 0$ .

Mit dieser Charakterisierung läßt sich auch die Rekurrenz der Markovkette zeigen, die ja  $E_x[\eta_A] = \infty \forall A \in \mathcal{B}^+(X)$  nicht nur für alle  $x \in A$  (wie in Satz 3.55 gezeigt), sondern auch für alle  $x \in X$  voraussetzt.

**Satz 3.58**  $\Phi$  ist rekurrent.

**Beweis:** Sei  $A \in \mathcal{B}^+(X)$ . Dann gibt es nach Satz 3.56 ein  $N \in \mathbb{N}_0$  mit  $P^N(1, A) > 0$ . Sei  $x \in X$  beliebig. Dann gilt für alle  $n \geq N + 1$

$$\begin{aligned} P^n(x, A) &\stackrel{3.7}{=} \int_X P^{n-N}(x, dy) P^N(y, A) \geq \int_{\{1\}} P^{n-N}(x, dy) P^N(y, A) \\ &= P^{n-N}(x, \{1\}) P^N(1, A) \stackrel{3.53(a)}{\geq} q P^N(1, A) > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_x[\eta_A] = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(\{\Phi_n \in A\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, A) \geq \sum_{n=N+1}^{\infty} q P^N(1, A) = \infty.$$

□

Der folgende Satz zeigt die stärkere Harris-Rekurrenz für  $\Phi$ .

**Satz 3.59**  $\Phi$  ist Harris-rekurrent.

**Beweis:** Nach Folgerung 3.51 ist  $C = \{1\} \in \mathcal{B}(X)$  petit. Sei nun  $x \in X$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} L(x, \{1\}) &= P_x(\tau_C < \infty) = P_x(\Phi \text{ nimmt jemals den Wert 1 an}) \\ &= 1 - P_x(\Phi_n \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}) \stackrel{3.53(c)}{=} 1. \end{aligned}$$

Da  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel ist, folgt mit Satz 3.27:  $\Phi$  ist Harris-rekurrent. □

### 3.3.5 Positive Harris-Kette und invariantes Maß

Die folgende Abschätzung wird für den anschließenden Satz benötigt.

**Lemma 3.60** *Es gilt für jedes  $x \in X$ :  $E_x[\tau_C] \leq \frac{1}{q^2} < \infty$ .*

**Beweis:** Sei  $x \in X$  beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
 E_x[\tau_C] &= E_x[\min\{n \geq 1 : \Phi_n = 1\}] = \sum_{n=1}^{\infty} n P_x(\Phi_n = 1, \Phi_j \neq 1, 1 \leq j < n) \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n P_x(\Phi_j \neq 1, 1 \leq j < n) \stackrel{3.53(b)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} n(1-q)^{n-1} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} (1-q)^j = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{q} - \sum_{j=0}^{m-1} (1-q)^j \right) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{q} - \frac{1 - (1-q)^m}{q} \right) = \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{\infty} (1-q)^m = \frac{1}{q^2}
 \end{aligned}$$

□

**Satz 3.61**  *$\Phi$  ist eine positive Harris-Kette.*

**Beweis:** Nach Folgerung 3.47 ist  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel, nach Satz 3.49 ist  $\{1\}$  ein zugängliches Atom für  $\Phi$ . Da  $\Phi$  nach Satz 3.58 zusätzlich rekurrent ist, folgt mit Satz 3.29: Es gibt ein invariantes Maß  $\pi$  für  $\Phi$ , und dieses ist gegeben durch

$$\pi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_1P^n(1, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_1(\Phi_n \in A, \Phi_j \neq 1 \forall 1 \leq j < n), \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

$\pi$  ist nach Satz 3.30 eindeutig bis auf konstante Vielfache. Nach Satz 3.32 ist  $\pi$  zusätzlich endlich, da  $C = \{1\} \in \mathcal{B}^+(X)$  petit ist und nach Lemma 3.60 insbesondere gilt:  $\sup_{x \in C} E_y[\tau_C] \leq \frac{1}{q^2} < \infty$ . Damit definiert  $\pi^*(A) := \frac{\pi(A)}{\pi(X)}$  ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$ , und dieses ist eindeutig.

Da  $\Phi$   $\psi$ -irreduzibel ist und ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  zuläßt, ist  $\Phi$  nach Definition eine positive Kette. Da  $\Phi$  nach Satz 3.59 außerdem Harrisrekurrent ist, ist  $\Phi$  nach Definition eine positive Harris-Kette. □

**Folgerung 3.62** *Es gibt ein (bis auf konstante Vielfache) eindeutiges und endliches invariantes Maß  $\pi$  für  $\Phi$ , und dieses ist gegeben durch*

$$\pi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_1P^n(1, A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_1(\Phi_n \in A, \Phi_j \neq 1 \forall 1 \leq j < n), \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

*Es gibt ein eindeutiges invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$ , und dieses ist gegeben durch  $\pi^*(A) = \frac{\pi(A)}{\pi(X)} \forall A \in \mathcal{B}(X)$ .*

### 3.3.6 T-Kette und topologische Gutartigkeit

**Satz 3.63**  $\Phi$  ist eine T-Kette.

**Beweis:** Setze  $a = \delta_1$ , wobei  $\delta_1$  wieder das Dirac-Maß für den Wert 1 bezeichne. Dann ist  $a$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{N}_0$  und die zugehörige Sample-Kette  $\Phi_a$  wird bestimmt durch den Übergangskern  $K_a(x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n) = P(x, A)$ , also  $\Phi_a = \Phi$ .

Setze nun  $T(x, A) := q\delta_1(A)$  für alle  $x \in X, A \in \mathcal{B}(X)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} K_a(x, A) &= P(x, A) = q\delta_1(A) + (1 - q)\mu\left(\frac{A}{x}\right) \geq q\delta_1(A) \\ &= T(x, A), \quad x \in X, A \in \mathcal{B}(X). \end{aligned}$$

Außerdem ist  $T(\cdot, A)$  von unten halbstetig, da konstant, für jedes  $A \in \mathcal{B}(X)$ ;  $T(x, X) = q\delta_1(X) = q > 0 \forall x \in X$ , da  $q \in (0, 1)$  und  $1 \in X$ ; und  $T$  ist ein substochastischer Kern:

(i) für jedes  $A \in \mathcal{B}(X)$  ist  $T(\cdot, A)$  eine nicht-negative meßbare Funktion auf  $X$ :

$T(x, A) = q\delta_1(A) \geq 0 \forall x \in X, A \in \mathcal{B}(X)$ , da  $q \in (0, 1)$ . Außerdem ist für ein festes  $A \in \mathcal{B}(X)$   $T(\cdot, A)$  meßbar, da konstant.

(ii) Für jedes  $x \in X$  ist  $T(x, \cdot) = q\delta_1$  ein Maß auf  $\mathcal{B}(X)$ , da  $\delta_1$  ein Maß ist.

(iii)  $T(x, X) = q\delta_1(X) = q \leq 1 \forall x \in X$ .

Nach Definition ist somit  $\Phi$  eine T-Kette mit stetiger Komponente  $T$  von  $K_a = P$ .  $\square$

Eine Hilfsaussage:

**Lemma 3.64**  $x^* = 1$  ist ein erreichbarer Zustand.

**Beweis:** Sei  $O \in \mathcal{B}(X)$  eine offene Menge mit  $x \in O$  und  $y \in X$  beliebig. Dann gilt  $\sum_n P^n(y, O) \geq P(y, O) \geq q\delta_1(O) = q > 0$ , da  $1 \in O$ .  $\square$

**Satz 3.65**  $\Phi$  ist nicht-evaneszent (nicht-verschwindend) und beschränkt in Wahrscheinlichkeit.

**Beweis:**  $\Phi$  ist eine T-Kette nach Satz 3.63 und eine positive Harris-Kette nach Satz 3.61. Zusätzlich ist  $x^* = 1$  ein erreichbarer Zustand nach Lemma 3.64. Die Behauptung folgt mit Satz 3.38.  $\square$

Die Eigenschaften der Kette - eine gewisse Art von Stetigkeit des Übergangskerns, die positive Harris-Rekurrenz und die Erreichbarkeit des ausgezeichneten Zustandes 1 - garantieren also eine topologische Gutartigkeit von  $\Phi$ : die Kette hält sich „im wesentlichen“ in kompakten Mengen auf. Mit Wahrscheinlichkeit Null verläßt sie alle kompakten Mengen nach endlich vielen Besuchen und es lassen sich stets kompakte Mengen finden, so daß die Wahrscheinlichkeit des Aufenthaltes darin beliebig nahe an die Eins heranreicht.

### 3.4 Ergodizität und Konvergenz

**Satz 3.66** Für jede Anfangsverteilung  $\lambda$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int P^n(x, \cdot) d\lambda(x) - \pi^* \right\| = 0$$

für das eindeutige invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$ .

**Beweis:** Nach Folgerung 3.62 ist  $\pi^*$  eindeutig. Da  $\Phi$  eine positive Harris-Kette und aperiodisch ist, folgt die Behauptung mit Satz 3.41.  $\square$

Dieses Ergebnis ist vergleichbar mit dem aus dem diskreten Fall bekannten - die  $n$ -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten konvergieren unabhängig von der Anfangsverteilung gegen ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$ . Dabei beziehen sich im stetigen Fall die Wahrscheinlichkeiten im allgemeinen nicht auf einzelne Zustände, sondern auf Mengen. Satz 3.66 liefert allerdings auch eine Gleichmäßigkeit der Konvergenz in  $A$ , wo in Kapitel 2 nur punktweise Konvergenz gezeigt wurde. Der folgende Satz liefert eine Gleichmäßigkeit der Konvergenz zusätzlich in  $x$ .

Interpretieren läßt sich dies als - vom Anfangszustand oder der Anfangsverteilung unabhängiges - Einpendeln eines Systems in seinen stabilen (invarianten) Zustand im Unendlichen.

**Satz 3.67**  $\Phi$  ist gleichmäßig ergodisch, d.h.

$$\sup_{x \in X} \|P^n(x, \cdot) - \pi^*\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Beweis:**  $\Phi$  ist aperiodisch nach Satz 3.52 und  $C = \{1\}$  ist petit nach Folgerung 3.51. Nach Lemma 3.60 ist  $\sup_{x \in X} E_x[\tau_C] \leq \frac{1}{q^2} < \infty$ , da  $q \in (0, 1)$ . Mit Satz 3.43

(i) und (iii) folgt:  $\Phi$  ist gleichmäßig ergodisch und für jede Menge  $A \in \mathcal{B}^+(X)$  gilt:  $\sup_{x \in X} E_x[\tau_A] < \infty$ .  $\square$

**Folgerung 3.68** Für jede Menge  $A \in \mathcal{B}^+(X)$  gilt:  $\sup_{x \in X} E_x[\tau_A] < \infty$ .

Nach der Charakterisierung in Satz 3.56 bedeutet dies also, daß alle Mengen  $A$ , die von der 1 aus mit positiver Wahrscheinlichkeit in endlicher Zeit erreicht werden, auch einen gleichmäßig beschränkten endlichen Erwartungswert der ersten Besuchszeit von jedem Startpunkt aus haben.

**Folgerung 3.69** Die Konvergenz in Satz 3.67 findet mit gleichmäßiger geometrischer Rate statt, d.h. es gibt ein  $r > 1$  und ein  $R < \infty$ , so daß für alle  $x \in X$  gilt:

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi^*\| \leq Rr^{-n}.$$

**Beweis:** Satz 3.43, Teile (i) und (ii). □

Die stärkere gleichmäßige Konvergenz impliziert natürlich auch die schwächere „punktweise“ Konvergenz für jedes  $x \in X$  und  $A \in \mathcal{B}(X)$ :

**Folgerung 3.70** Für alle  $x \in X$  und  $A \in \mathcal{B}(X)$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P^n(x, A) - \pi^*(A)| = 0.$$

**Beweis:** Nach Satz 3.40 gilt  $\sup_{A \in \mathcal{B}(X)} (P^n(x, A) - \pi^*(A)) \geq 0$ ,

–  $\inf_{A \in \mathcal{B}(X)} (P^n(x, A) - \pi^*(A)) \geq 0$ , also für jedes  $x \in X, A \in \mathcal{B}(X)$

$$\begin{aligned} & |P^n(x, A) - \pi^*(A)| \\ & \leq \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} (P^n(x, A) - \pi^*(A)) + \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} (\pi^*(A) - P^n(x, A)) \\ & \leq \sup_{x \in X} \|P^n(x, \cdot) - \pi^*\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \text{ nach Satz 3.67.} \end{aligned}$$

□

Wie sieht nun aber die invariante Verteilung  $\pi^*$  aus? Nach Lemma 3.45 ist

$$\begin{aligned} P^n(x, A) &= q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{n-1} (1-q)^i \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \\ &+ (1-q)^n \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{xz_1 \cdot \dots \cdot z_{n-1}}\right) d\mu(z_{n-1}) \dots d\mu(z_1), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P^n(x, A) - \pi^*(A)| = 0 \quad \text{für alle } x \in X, A \in \mathcal{B}(X),$$

so legt dies die Vermutung nahe, daß

$$\pi^*(A) = q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1),$$

da  $(1-q)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  wegen  $q \in (0, 1)$ . Tatsächlich gilt

**Satz 3.71** Das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß für  $\Phi$  ist

$$\pi^*(A) = q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1).$$

**Beweis:** Benutze die Notation  $\mu_x$  analog zu Satz 3.45.

1.  $\pi^*$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß:

Offensichtlich ist  $\pi^*$  ein Maß, da  $\delta_1$  und  $\mu$  Maße sind. Ferner ist

$$\begin{aligned}\pi^*(X) &= q\delta_1(X) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \mu(X) \mu(X) \dots \mu(X) \delta_1(X) \\ &= q \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \right] = q \sum_{i=0}^{\infty} (1-q)^i = q \frac{1}{q} = 1,\end{aligned}$$

da  $\frac{X}{y} = X \forall y \in X$ .

2.  $\pi^*$  ist invariant für  $\Phi$ :

$$\begin{aligned}& \int_X P(x, A) d\pi^*(x) \\ &= \int_X \left[ q\delta_1(A) + (1-q)\mu\left(\frac{A}{x}\right) \right] \\ & \quad \left[ qd\delta_1(x) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \int_X \dots \int_X d\mu_{z_1 \dots z_i}(x) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \right] \\ & \stackrel{(3.6)}{=} q\delta_1(A)\pi^*(X) + q(1-q) \int_X \mu\left(\frac{A}{x}\right) d\delta_1(x) \\ & \quad + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^{i+1} \int_X \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{xz_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(x) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \\ &= q\delta_1(A) + q(1-q) \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1}\right) d\delta_1(z_1) \\ & \quad + q \sum_{i=2}^{\infty} (1-q)^i \int_X \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \\ &= q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \int_X \dots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdot \dots \cdot z_i}\right) d\mu(z_i) \dots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1).\end{aligned}$$

3.  $\pi^*$  ist nach Folgerung 3.62 eindeutig. □

## 3.5 Ein Vergleich mit additiven Modellen

Bevor in den nächsten Abschnitten konkrete Markovketten mit speziellen Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mu$  behandelt werden, befaßt sich dieser Abschnitt mit einem Vergleich des bisher behandelten Modells mit dem Random Walk bzw.

dem Random Walk on a Half Line. Ein Zusammenhang scheint auf der Hand zu liegen - während das hier behandelte Modell multiplikative Prozesse, also Markovketten der Form  $\Phi_n = \Phi_{n-1}Z_n$  mit identisch und gleich verteilten (i.i.d.) Zufallsvariablen  $Z_n$  beschreibt, beschreibt der Random Walk additive Prozesse, also Markovketten der Form  $\Phi_n = \Phi_{n-1} + W_n$  mit i.i.d. Zufallsvariablen  $W_n$ . Eine logarithmische bzw. exponentielle Transformation liegt nahe. Der zusätzliche Effekt der „Rückschlagereignisse“, die sich als Reset auf die 1 ausdrücken, könnte eventuell mit dem speziellen Random Walk on a Half Line korrespondieren, der ebenfalls einen ausgezeichneten Punkt - die 0 - hat, und für diesen Punkt positive und besonders hohe Übergangswahrscheinlichkeiten  $P(x, \{0\})$  aufweist.

Im folgenden wird deshalb zunächst das Modell des Random Walks sowie dasjenige des Random Walks on a Half Line vorgestellt, um danach aufzuzeigen, warum sich trotz einiger Analogien keine direkte Korrespondenz zwischen diesen Modellen und dem untersuchten Modell herstellen läßt.

Die folgenden Definitionen finden sich in ähnlicher Form in Meyn und Tweedy, [10], in den Abschnitten 3.3.2 und 3.5.1.

**Definition 3.72** *Seien  $W_n, n \in \mathbb{N}$ , i.i.d. Zufallsvariablen. Die Verteilung jedes  $W_n$  werde beschrieben durch das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\Gamma$  auf  $\mathbb{R}$ , also  $\Gamma(A) = P(W_n \in A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}$ .*

*Definiere die Markovkette  $\Phi$  über  $\Phi_n = \Phi_{n-1} + W_n$ . Dies ergibt als Übergangskern*

$$\begin{aligned} P(x, A) &= P(\Phi_1 \in A | \Phi_0 = x) = P(\Phi_0 + W_1 \in A | \Phi_0 = x) = P(W_1 \in A - x) \\ &= \Gamma(A - x), \end{aligned}$$

wobei  $A - x$  analog zu  $\frac{A}{x}$  punktweise definiert ist.

Dann heißt die Markovkette  $\Phi$  **Random Walk**.

**Bemerkung 3.73** *Der Beweis, daß es sich bei den angegebenen Übergangskernen des Random Walks sowie des Random Walk on a Half Line (siehe nächste Definition) tatsächlich um Übergangskerne handelt, läuft analog zum Beweis von Satz 3.44. Die Markovketten sind somit wohldefiniert.*

Der einfache Random Walk ist unabhängig von  $\Gamma$  niemals positiv rekurrent, wie Meyn und Tweedie in Theorem 10.5.1, [10], zeigen. Da das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$  invariant ist für den Random Walk, gibt es kein endliches invariantes Maß. Das Ergebnis läßt sich so interpretieren, daß sich die Markovkette asymptotisch mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf ganz  $\mathbb{R}$  befinden kann. Dieses Ergebnis ist nicht sehr informativ, und so betrachtet man häufig auch Random Walks mit zusätzlichen Mechanismen an einem Rand (oder mehreren Rändern). Ein solcher Random Walk ist der Random Walk on a Half Line aus der nächsten Definition, der die Markovkette sozusagen wieder auf 0 „setzt“, sollte sie einmal in den negativen Werten „landen“.

**Definition 3.74** Seien  $W_n, n \in \mathbb{N}$ , i.i.d. Zufallsvariablen und die Verteilung jedes  $W_n$  werde beschrieben durch das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\Gamma$  auf  $\mathbb{R}$ , also  $\Gamma(A) = \mathbb{P}(W_m \in A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}$ .

Definiere die Markovkette  $\Phi$  über  $\Phi_n = [\Phi_{n-1} + W_n]^+$ ,

$$\text{wobei } [x]^+ := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Dies ergibt als Übergangskern für  $A \subseteq (0, \infty), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(x, A) = \mathbb{P}(\Phi_0 + W_1 \in A | \Phi_0 = x) = \mathbb{P}(W_1 \in A - x) = \Gamma(A - x) \quad (3.9)$$

und für  $A = \{0\}$

$$P(x, \{0\}) = \mathbb{P}(\Phi_0 + W_1 \leq 0 | \Phi_0 = x) = \mathbb{P}(W_1 \leq -x) = \Gamma(-\infty, -x]. \quad (3.10)$$

Dann heißt die Markovkette  $\Phi$  **Random Walk on a Half Line** (Random Walk auf der halben - nicht-negativen - reellen Achse).

**Satz 3.75** Ist  $\Phi$  die Markovkette aus Abschnitt 3.2, so gibt es keinen Random Walk on a Half Line  $\Phi'$ , so daß  $\Phi = \exp(\Phi')$ , also  $\Phi_n = \exp(\Phi'_n), n \in \mathbb{N}_0$ .

**Beweis:** Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gäbe einen Random Walk on a Half Line  $\Phi'$  mit  $\Phi = \exp(\Phi')$ . Es folgt sofort für den Übergangskern  $P'$  von  $\Phi'$ , daß  $P'(x, A) = P(\exp(x), \exp(A)) \forall x \in (-\infty, \infty), A \in \mathcal{B}((0, \infty))$ , wobei  $\exp(A) = \{\exp(y) | y \in A\}$ . Es seien  $W_n$  die zu  $\Phi'$  gehörigen i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilung  $\Gamma$  auf  $\mathbb{R}$ . Setzte  $\mu' := \Gamma \circ \ln$  auf  $(0, \infty)$ . Da die Exponentialfunktion auf  $\mathbb{R}$  stetig und somit meßbar ist, ist nach Satz 7.5 aus Bauer, [2], das Bildmaß  $\mu' = \Gamma \circ (\exp)^{-1}$  wohldefiniert.

Nach den Eigenschaften eines Random Walks on a Half Line folgt

$$P(\exp(x), \exp(A)) = P'(x, A) \stackrel{(3.9)}{=} \Gamma(A - x) = \mu'(\exp(A - x)) = \mu'\left(\frac{\exp(A)}{\exp(x)}\right)$$

für alle  $A \subseteq (0, \infty) \Leftrightarrow \exp(A) \subseteq (1, \infty)$

und

$$\begin{aligned} P(\exp(x), \{1\}) &= P'(x, \{0\}) \stackrel{(3.10)}{=} \Gamma(-\infty, -x] = \mu'(\exp((-\infty, -x])) \\ &= \mu'\left(\left(0, \frac{1}{\exp(x)}\right]\right) \end{aligned}$$

jeweils für alle  $x \in [0, \infty)$ .

Somit ergibt sich mit dem Modell aus Abschnitt 3.2

$$P(y, B) = \mu'\left(\frac{B}{y}\right) \stackrel{!}{=} (1 - q)\mu\left(\frac{B}{y}\right) \forall B \in \mathcal{B}((1, \infty)), \forall y \in [1, \infty) \text{ und}$$

$$P(y, \{1\}) = \mu'\left(\left(0, \frac{1}{y}\right)\right) \stackrel{!}{=} q + (1 - q)\mu\left(\left\{\frac{1}{y}\right\}\right) \forall y \in [1, \infty).$$

Daraus folgt  $\mu'(A_n) \geq q$  für alle  $n \in \mathbb{N}, A_n := \left(0, \frac{1}{n+1}\right]$ . Da  $\mu'$  ein Maß und somit stetig von oben ist, und  $A_n \downarrow \emptyset$ , folgt  $\mu'(\emptyset) \geq q$  im Widerspruch zu  $\mu'(\emptyset) = 0$  als Wahrscheinlichkeitsmaß. Die Annahme ist also falsch und es folgt: Es gibt keinen Random Walk on a Half Line  $\Phi'$ , so daß  $\Phi = \exp(\Phi')$ .  $\square$

**Bemerkung 3.76** *Der Unterschied zwischen einem Random Walk on a Half Line und einer multiplikativen Markovkette mit Rückschlagereignissen - außer der logarithmischen/exponentiellen Transformation - läßt sich auch wie folgt verdeutlichen:*

*Für einen Random Walk on a Half Line  $\Phi'$  gilt  $\Phi'_n = [\Phi'_{n-1} + W_n]^+$ ,  $W_n$  i.i.d. auf  $(-\infty, \infty)$ . Somit hängt die Wahrscheinlichkeit für  $\Phi'_n$  auf 0 „gesetzt zu werden“ - also die Wahrscheinlichkeit für  $\Phi'_{n-1} + W_n < 0$  - von  $\Phi'_{n-1}$  ab und ist größer, je kleiner  $\Phi'_{n-1}$  ist.*

*Für eine multiplikative Markovkette mit Rückschlagereignissen  $\Phi$  hingegen gilt  $\Phi_n = \begin{cases} \Phi_{n-1}Z_n, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1 - q) \\ 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q \end{cases}$ ,  $Z_n$  i.i.d. auf  $(0, \infty)$ .*

*Somit hängt hier die Wahrscheinlichkeit, auf 1 „gesetzt zu werden“ nicht von  $\Phi_{n-1}$  ab, sondern ist immer konstant =  $q$ .*

*Hierin liegt der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Modellen. Ein Random Walk on a Half Line Modell würde exponentiell transformiert einem multiplikativen Modell mit Rückschlägen entsprechen, bei dem Rückschläge wahrscheinlicher bei kleinen „Populationen“ - kleinen Werten der Markovkette - sind. Da jedoch weder wichtige neue Ergebnisse, z.B. bezüglich eines asymptotischen invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes, für den Random Walk on a Half Line vorliegen, noch eine solche spezielle Struktur der Rückschlagswahrscheinlichkeiten in diesem Modell sinnvoll erscheint, wird dieser Zusammenhang im folgenden nicht weiter untersucht.*

*Das betrachtete Modell würde logarithmisch transformiert einem Modell*

$$\Phi'_n = \begin{cases} \Phi'_{n-1} + W_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1 - q) \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q \end{cases}, \quad W_n \text{ i.i.d. auf } \mathbb{R}$$

*entsprechen - ein solches Modell scheint jedoch in der Literatur (z.B. in Meyn und Tweedie, [10], Karlin, [6], und Karlin and Taylor, [7], oder Durrett, [3]) bisher nicht bekannt.*

In den nächsten zwei Abschnitten werden konkrete Modelle mit zwei verschiedenen Verteilungen  $\mu$  untersucht. Dabei stellt die Gleichverteilung auf einem Intervall  $[a, b]$ ,  $1 < a < b$  oder  $a < b < 1$ , ein Beispiel für eine Verteilung mit begrenztem Träger dar, während die Exponentialverteilung ein Beispiel für eine Verteilung mit unbegrenztem Träger ist. Wie sich herausstellt, ergeben beide Fälle eigene Schwierigkeiten für die Lösung der Invarianzgleichung (3.3), die sich anders als durch Abschätzungen nicht so einfach umgehen lassen.

### 3.6 Gleichverteilung für den Übergangskern

Sei wieder  $X = \mathbb{R}^{>0}$ . Seien  $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$  und  $\mu$  die Gleichverteilung auf dem Intervall  $[a, b]$ , also

$$\mu(A) = \frac{1}{b-a} \int_A \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy \quad \forall A \in \mathcal{B}(X).$$

Sei nun  $a < b < 1$  oder  $1 < a < b$ . Zur einfacheren Schreibweise betrachte  $1 < a < b$ , der andere Fall ist spiegelbildlich. Dies entspricht einem Wachstum zwischen den Resetereignissen.

Definiere den zu  $\Phi$  gehörigen Übergangskern als

$$\begin{aligned} P(x, A) &= q\delta_1(A) + (1-q)\mu\left(\frac{A}{x}\right) \\ &= q\delta_1(A) + (1-q)\frac{1}{b-a} \int_{\frac{A}{x}} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy \quad \forall x \in X, A \in \mathcal{B}(X). \end{aligned}$$

Dies entspricht also dem Fall eines Resets auf 1 und eines multiplikativen Faktors mit Gleichverteilung im Intervall  $[a, b]$ .

Interessant ist nun das asymptotische Verhalten der durch  $P$  definierten Markovkette  $\Phi$ .

**Satz 3.77** *Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt*

1.  $\pi^*((0, 1)) = 0$ ,
2.  $\pi^*({1}) = q$ ,
3.  $\pi^*((b^n, a^{n+1})) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , falls  $b^n < a^{n+1}$  (zwischen zwei Intervallen),
4.  $\pi^*([a^n, b^n]) \geq q(1-q)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  
 $\pi^*([a^n, b^n]) = q(1-q)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b^n < a^{n+1}$  (disjunktes Intervall).

**Beweis:**  $\pi^*$  ist eindeutig nach Folgerung 3.62.

1. Ist  $x \geq 1$ , so gilt  $\frac{1}{x} \leq 1 < a$  und somit ist  $[a, b] \cap (0, \frac{1}{x}) = \emptyset$  ( $\star$ ). Damit folgt

$$\begin{aligned} \pi^*((0, 1)) &= \int_X P(x, (0, 1)) d\pi^*(x) \\ &= \int_X (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b] \cap (0, \frac{1}{x})}(y) dy d\pi^*(x) \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \int_{(0,1)} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy d\pi^*(x) \end{aligned}$$

$$= (1 - q)\pi^*((0, 1)) \Rightarrow \pi^*((0, 1)) = 0, \text{ da } q \in (0, 1).$$

2. Da  $\pi^*$  invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt

$$\begin{aligned} \pi^*({1}) &= \int_X P(x, {1}) d\pi^*(x) \\ &= \int_X \left( q\delta_1({1}) + (1 - q)\frac{1}{b - a} \int_{\frac{{1}}{x}}^b \mathbb{1}_{[a, b]}(y) dy \right) d\pi^*(x) \\ &= \int_X q d\pi^*(x) = q\pi^*(X) = q. \end{aligned}$$

3. Beweis durch vollständige Induktion. Beachte dabei, daß für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b^n < a^{n+1}$  wegen  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$  auch  $b^{n-1} < a^n$  gilt. Es ist also sinnvoll, 3. und den zweiten Teil von 4. durch vollständige Induktion zu zeigen.

IA:  $n = 0$  :

$$\begin{aligned} \pi^*((1, a)) &= \int_X P(x, (1, a)) d\pi^*(x) \\ &\leq \pi^*((0, 1)) + \int_{[1, \infty)} (1 - q)\frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b] \cap (\frac{1}{x}, \frac{a}{x})}(y) dy d\pi^*(x) \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

da  $\frac{a}{x} \leq a$  für alle  $x \in [1, \infty)$ .

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b^n < a^{n+1}$ , und die Aussage wahr für  $n - 1$ .

IS: Da  $\pi^*$  invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt

$$\begin{aligned} \pi^*((b^n, a^{n+1})) &= \int_X P(x, (b^n, a^{n+1})) d\pi^*(x) \\ &= \int_X (1 - q)\frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b] \cap (\frac{b^n}{x}, \frac{a^{n+1}}{x})}(y) dy d\pi^*(x). \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\mathbb{1}_{[a, b] \cap (\frac{b^n}{x}, \frac{a^{n+1}}{x})}(y) > 0 \Leftrightarrow a \leq y \leq b \text{ und } \frac{b^n}{x} < y < \frac{a^{n+1}}{x} \Rightarrow b^{n-1} < x < a^n.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi^*((b^n, a^{n+1})) &= \int_{(b^{n-1}, a^n)} (1 - q)\frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b] \cap (\frac{b^n}{x}, \frac{a^{n+1}}{x})}(y) dy d\pi^*(x) \\ &\leq \int_{(b^{n-1}, a^n)} (1 - q)\frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b]}(y) dy d\pi^*(x) \end{aligned}$$

$$= (1 - q)\pi^*((b^{n-1}, a^n)) \stackrel{IV}{=} 0.$$

Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung.

4. Beweis durch vollständige Induktion.

IA:  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} \pi^*([a, b]) &= \int_X P(x, [a, b]) d\pi^*(x) \\ &= \int_X (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b] \cap [\frac{a}{x}, \frac{b}{x}]}(y) dy d\pi^*(x) \\ &\geq \int_{\{1\}} (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b]}(y) dy d\pi^*(x) = \pi^*({1})(1 - q) \stackrel{2.}{=} q(1 - q). \end{aligned}$$

Betrachte nun den Fall aller  $a, b \in (1, \infty)$  mit  $a < b < a^2$ . Dann ist wegen  $\pi^* \equiv 0$  auf  $(0, 1)$

$$\begin{aligned} \pi^*([a, b]) &= \int_X (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b] \cap [\frac{a}{x}, \frac{b}{x}]}(y) dy d\pi^*(x) \\ &= \int_{\{1\}} \dots + \int_{(1, a)} \dots + \int_{[a, \infty)} \dots =: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

$I_1 = q(1 - q)$  nach obiger Rechnung.

$$I_2 \leq \int_{(1, a)} (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b]}(y) dy d\pi^*(x) = \pi^*((1, a))(1 - q) \stackrel{3.}{=} 0.$$

$I_3 = 0$ , da für  $x \geq a$  aus  $a \leq y \leq b$  und  $\frac{a}{x} \leq y \leq \frac{b}{x}$  sofort  $b \geq xy \geq ax \geq a^2$  folgen würde, im Widerspruch zu  $b < a^2$ , also  $\mathbb{1}_{[a, b] \cap [\frac{a}{x}, \frac{b}{x}]}(y) \equiv 0$  für  $x \geq a$ .

Insgesamt folgt  $\pi^*([a, b]) = q(1 - q)$ .

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , und die Behauptung wahr für  $n - 1$ .

IS: Da  $\pi^*$  invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt

$$\begin{aligned} \pi^*([a^n, b^n]) &= \int_X P(x, [a^n, b^n]) d\pi^*(x) \\ &= \int_X (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b] \cap [\frac{a^n}{x}, \frac{b^n}{x}]}(y) dy d\pi^*(x) \\ &\geq \int_{[a^{n-1}, b^{n-1}]} (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b] \cap [\frac{a^n}{x}, \frac{b^n}{x}]}(y) dy d\pi^*(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[a^{n-1}, b^{n-1}]} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
&= (1-q) \pi^*([a^{n-1}, b^{n-1}]) \stackrel{IV}{\geq} q(1-q)^n.
\end{aligned}$$

Für alle  $a, b \in (1, \infty)$  mit  $a^n < b^n < a^{n+1}$  (und somit auch  $b^{n-1} < a^n$ , s.o.) gilt

$$\begin{aligned}
\pi^*([a^n, b^n]) &= \int_X (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b] \cap [\frac{a^n}{x}, \frac{b^n}{x}]}(y) dy d\pi^*(x) \\
&\stackrel{1.}{=} \int_{[1, b^{n-2}]} \cdots + \int_{(b^{n-2}, a^{n-1})} \cdots + \int_{[a^{n-1}, b^{n-1}]} \cdots + \int_{(b^{n-1}, a^n)} \cdots + \int_{[a^n, \infty)} \cdots \\
&=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}$$

Dabei ist  $I_4$  wohldefiniert wegen  $b^{n-1} < a^n$ . Für  $n = 2$  ist  $\int_{[1, b^{n-2}]} = \int_{\{1\}}$ .

Es ist

$I_1 = 0$ , denn für  $x \leq b^{n-2}$  folgt aus  $a \leq y \leq b$  und  $a^n \leq xy \leq b^n$  sofort  $a^{n+1} \leq axy \leq ab^{n-2}b \leq b^n$  im Widerspruch zu  $b^n < a^{n+1}$ , also  $\mathbb{1}_{[a,b] \cap [\frac{a^n}{x}, \frac{b^n}{x}]}(y) \equiv 0$  für  $x \leq b^{n-2}$ ,

$$I_2 \leq \int_{(b^{n-2}, a^{n-1})} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy d\pi^*(x) = (1-q) \pi^*((b^{n-2}, a^{n-1})) \stackrel{2.}{=} 0,$$

$I_4 = 0$  analog zu  $I_2$ ,

$I_5 = 0$ , denn für  $x \geq a^n$  folgt aus  $a \leq y \leq b$  und  $a^n \leq xy \leq b^n$  sofort  $b^n \geq xy \geq a^n y \geq a^{n+1}$  im Widerspruch zu  $b^n < a^{n+1}$ , also  $\mathbb{1}_{[a,b] \cap [\frac{a^n}{x}, \frac{b^n}{x}]}(y) \equiv 0$  für  $x \geq a^n$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi^*([a^n, b^n]) &= \int_{[a^{n-1}, b^{n-1}]} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b] \cap [\frac{a^n}{x}, \frac{b^n}{x}]}(y) dy d\pi^*(x) \quad (3.11) \\
&= (1-q) \pi^*([a^{n-1}, b^{n-1}]) \stackrel{IV}{=} q(1-q)^n
\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt insgesamt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.78** Dies ist also eine natürliche Erweiterung des diskreten Falles 2.2. Nur verteilt sich hier die „Masse“ der asymptotischen Verteilung nicht auf den Punkten  $1, \mu, \mu^2, \dots$ , sondern entsprechend auf den Intervallen  $[1, 1]$ ,  $[a, b]$ ,  $[a^2, b^2]$ ,  $\dots$ , solange diese disjunkt sind. Die zu verteilende Masse (jeweils  $q(1-q)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ) bleibt jedoch gleich. Man könnte also Abschnitt 2.2 als Spezialfall dieses Abschnittes ansehen mit  $\mu = a = b$ , d.h. entarteter „Gleichverteilung“ (Dirac-Maß) auf dem Intervall  $[\mu, \mu]$ .

Zusätzlich gibt es hier jedoch den Effekt, daß sich für genügend große  $n$  die Intervalle überlappen. ( $b^n < a^{n+1} \Leftrightarrow (\frac{b}{a})^n < a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  kann wegen  $\frac{b}{a} > 1$  nicht gelten.) In diesem Fall kann offensichtlich das Wahrscheinlichkeitsmaß

$\pi^*$  des Intervalles  $[a^n, b^n]$  größer sein. Ob sich jedoch  $\pi^*$  in diesen Fällen im Überlappungsbereich einfach „aufaddiert“, oder noch zusätzliche Effekte hinzukommen, läßt sich aus Satz 3.77 nicht erkennen.

Immerhin läßt sich vermuten, daß das Maß eines Intervalls  $[a^n, b^n]$  zumindest nicht größer wird als die Summe der Maße aller Intervalle  $[a^j, b^j]$ , die sich mit diesem Intervall überschneiden, es im disjunkten Fall wäre. Dies belegt der nächste Satz.

**Satz 3.79** Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

1.  $\pi^*([1, b^n]) \geq \sum_{j=0}^n q(1-q)^j = 1 - (1-q)^{n+1},$
2.  $\pi^*([a^n, \infty)) \geq \sum_{j=n}^{\infty} q(1-q)^j = (1-q)^n,$
3.  $\pi^*([a^n, b^n]) \leq \sum_{j=\lceil n \log_b a \rceil}^{\lfloor n \log_a b \rfloor} q(1-q)^j = (1-q)^{\lceil n \log_b a \rceil} - (1-q)^{\lfloor n \log_a b \rfloor + 1}.$

**Beweis:** 1. Beweis durch vollständige Induktion.

IA:  $n = 0$ :  $\pi^*([1, b^0]) = \pi^*([1, 1]) \stackrel{3.77.2.}{=} q = \sum_{j=0}^0 q(1-q)^j.$

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$  und die Behauptung 1. erfüllt für  $n - 1$ .

IS: Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \pi^*([1, b^n]) &= \int_X \left\{ q\delta_1([1, b^n]) + (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b] \cap [\frac{1}{x}, \frac{b^n}{x}]}(y) dy \right\} d\pi^*(x) \\
 &\geq q + \int_{[1, b^{n-1}]} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b] \cap [\frac{1}{x}, \frac{b^n}{x}]}(y) dy d\pi^*(x) \\
 &= q + \int_{[1, b^{n-1}]} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
 &= q + (1-q)\pi^*([1, b^{n-1}]) \\
 &\stackrel{IV}{\geq} q + (1-q) \sum_{j=0}^{n-1} q(1-q)^j = \sum_{j=0}^n q(1-q)^j.
 \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit vollständiger Induktion.

2. Beweis durch vollständige Induktion.

IA:  $n = 0$ :  $\pi^*([a^0, \infty)) \stackrel{3.77.1.}{=} \pi^*(X) = 1 = \sum_{j=0}^{\infty} q(1-q)^j.$

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$  und die Aussage 2. erfüllt für  $n - 1$ .

IA: Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \pi^*([a^n, \infty)) &\geq \int_{[a^{n-1}, \infty)} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b] \cap [\frac{a^n}{x}, \infty)}(y) dy d\pi^*(x) \\
 &= \int_{[a^{n-1}, \infty)} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
 &= (1-q) \pi^*([a^{n-1}, \infty)) \stackrel{IV}{\geq} (1-q)^n.
 \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit vollständiger Induktion.

3. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es wegen  $1 < a < b$   $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ , so daß  $a^{n+k_1} \leq b^n$  und  $b^{n-k_2} \geq a^n$ , aber  $a^{n+k_1+1} > b^n$  und  $b^{n-k_2-1} < a^n$ . (Das Intervall  $[a^n, b^n]$  überschneidet sich mit den  $k_1$  nächsten und  $k_2$  vorigen Intervallen.) Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \pi^*([a^n, b^n]) &= 1 - \pi^*([1, a^n]) - \pi^*([b^n, \infty)) \\
 &\leq 1 - \pi^*([1, b^{n-k_2-1}]) - \pi^*([a^{n+k_1+1}, \infty)) \\
 &\stackrel{1.,2.}{\leq} 1 - (1 - (1-q)^{n-k_2}) - (1-q)^{n+k_1+1} \\
 &= (1-q)^{n-k_2} - (1-q)^{n+k_1+1}.
 \end{aligned}$$

$k_1 \in \mathbb{N}_0$  war ja nun so bestimmt, daß

$$\begin{aligned}
 &a^{n+k_1} \leq b^n && \wedge && a^{n+k_1+1} > b^n \\
 \stackrel{a \geq 1}{\Leftrightarrow} &n + k_1 \leq n \log_a b && \wedge && n + k_1 + 1 > n \log_a b \\
 \Leftrightarrow &k_1 \leq n(\log_a b - 1) && \wedge && k_1 > n(\log_a b - 1) - 1.
 \end{aligned}$$

Da  $k_1$  eine natürliche Zahl ist, ist dies äquivalent zu  $k_1 = \lfloor n(\log_a b - 1) \rfloor$ .

Analog für  $k_2 \in \mathbb{N}_0$ :

$$\begin{aligned}
 &b^{n-k_2} \geq a^n && \wedge && b^{n-k_2-1} < a^n \\
 \stackrel{b > 1}{\Leftrightarrow} &n - k_2 \geq n \log_b a && \wedge && n - k_2 - 1 < n \log_b a \\
 \Leftrightarrow &k_2 \leq n(1 - \log_b a) && \wedge && k_2 > n(1 - \log_b a) - 1 \\
 \stackrel{k_2 \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} &k_2 = \lfloor n(1 - \log_b a) \rfloor.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \pi^*([a^n, b^n]) &\leq (1-q)^{n - \lfloor n(1 - \log_b a) \rfloor} - (1-q)^{n + \lfloor n(\log_a b - 1) \rfloor + 1} \\
 &= (1-q)^{\lceil n - n(1 - \log_b a) \rceil} - (1-q)^{\lfloor n + n(\log_a b - 1) \rfloor + 1} \\
 &= (1-q)^{\lceil n \log_b a \rceil} - (1-q)^{\lfloor n \log_a b \rfloor + 1}.
 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 3.80** Wie „gut“ ist nun die Abschätzung für  $\pi^*([a^n, b^n])$  in Teil 3. von Satz 3.79? Sind  $a$  und  $b$  nahe beieinander, also  $a \approx b$ , so ist  $\log_a b \approx \log_b a \approx 1$ , also  $\lceil n \log_a b \rceil \approx \lceil n \log_b a \rceil \approx n$ , und somit ist die obere Grenze  $\approx (1 - q)^n - (1 - q)^{n+1} = (1 - q)^n(1 - 1 + q) = q(1 - q)^n$ , der unteren Grenze aus Satz 3.77. Dies stimmt auch mit den Resultaten für  $\mu = a = b$  aus Abschnitt 2.2 überein. Der Abstand zwischen oberer und unterer Grenze wird umso größer, je größer  $\frac{b}{a}$  ist. Dies entspricht der intuitiven Vorstellung, daß für große Intervalle  $[a, b]$  der Überlappungseffekt für große  $n$  stärker ist und somit auch das Maß  $\pi^*([a^n, b^n])$  schlechter nach oben begrenzt werden kann.

**Beispiel 3.81** Die mit Matlab erzeugte Abbildung 3.1 zeigt die obere („\*“) und untere („o“) Abschätzung gleichzeitig für das Beispiel  $q = \frac{1}{2}$ ,  $a = 4$  und  $b = 5$ . Man sieht deutlich, daß beide Grenzen für  $n = 1, \dots, 6$  übereinstimmen, jedoch für  $n > 6$  auseinandergehen. Dies ergibt sich dadurch, daß  $b^6 = 15625 < 16384 = a^7$  ist, also alle Intervalle bis  $[a^6, b^6]$  disjunkt sind, sich jedoch wegen  $b^7 = 78125 > 65536 = a^8$  die folgenden Intervalle überschneiden. Man sieht ebenfalls deutliche Sprünge in der oberen Grenze. Dies liegt an der Struktur der Gaußklammern, die Sprünge im Exponenten zur Folge hat. So sind die beiden Exponenten für  $n = 1, \dots, 20$

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lceil n \log_b a \rceil$	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9
$\lfloor n \log_a b \rfloor + 1$	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12
Differenz	1	1	1	1	1	1	2	3	3	3

$n$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\lceil n \log_b a \rceil$	10	11	12	13	13	14	15	16	17	18
$\lfloor n \log_a b \rfloor + 1$	13	14	16	17	18	19	20	21	23	24
Differenz	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6

wobei die Differenz gleichzeitig die Anzahl der mit  $[4^n, 5^n]$  überlappenden Intervalle (inklusive  $[4^n, 5^n]$  selbst) angibt - eine Erhöhung dieser Anzahl kann einen Sprung in der oberen Grenze zur Folge haben.

In den nächsten Sätzen wird nun die genaue Verteilung innerhalb der disjunkten Intervalle untersucht. Ist diese bekannt, so läßt sich auch die Vermutung überprüfen, daß sich bei Überlappen von Intervallen in diesem Bereich  $\pi^*$  einfach „aufaddiert“.

**Satz 3.82** Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt:

$$(1) \quad \pi^*([a, c]) = \int_a^c f(x) dx \quad \text{für alle } c \in [a, b], \text{ falls } b < a^2, \text{ wobei}$$

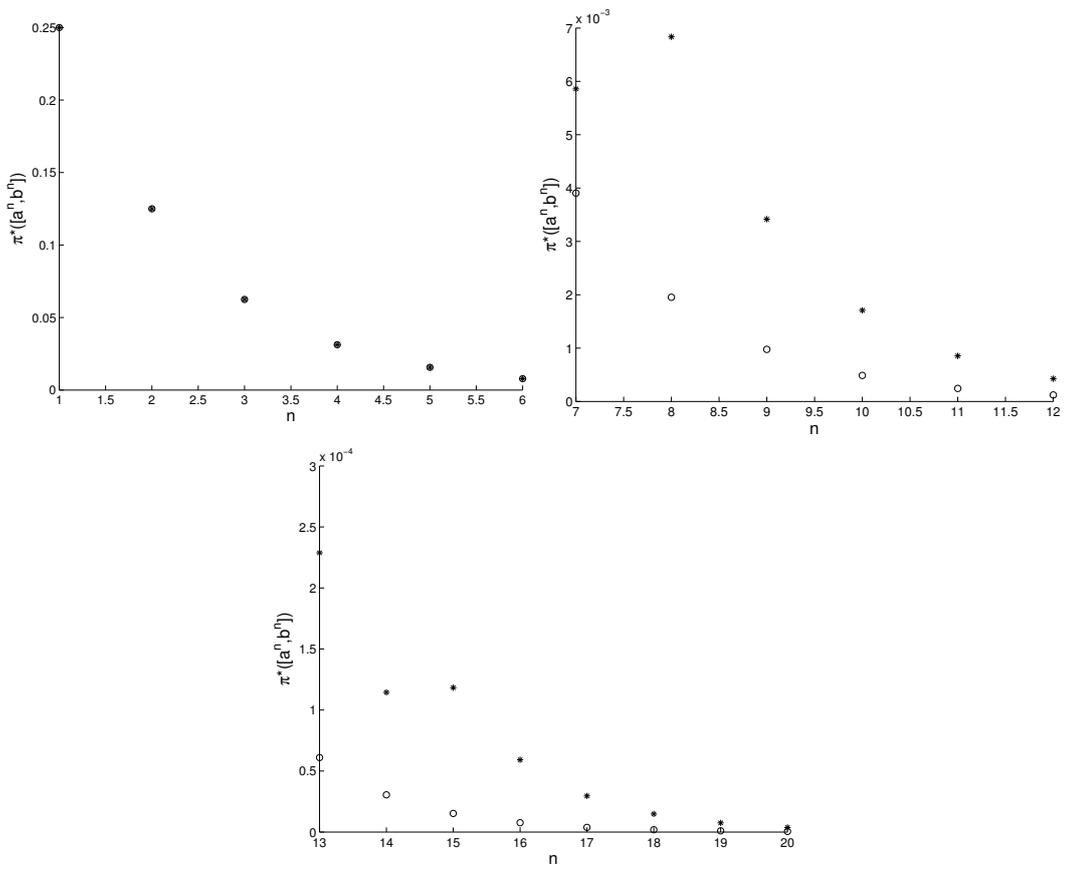


Abbildung 3.1: Abschätzungen für  $\pi^*([4^n, 5^n])$ ,  $n = 1, \dots, 20$ .

$$f(x) = q(1-q) \frac{1}{b-a} \text{ für } a \leq x \leq b.$$

$$(2) \quad \pi^*([a^2, c]) = \int_{a^2}^c f(x) dx \text{ für alle } c \in [a^2, b^2], \text{ falls } b^2 < a^3, \text{ wobei}$$

$$f(x) = q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \begin{cases} \ln(x) - \ln(a^2), & a^2 \leq x < ab \\ \ln(b^2) - \ln(x), & ab \leq x \leq b^2 \end{cases}.$$

$$(3) \quad \pi^*([a^3, c]) = \int_{a^3}^c f(x) dx \text{ für alle } c \in [a^3, b^3], \text{ falls } b^3 < a^4, \text{ wobei}$$

$$f(x) = q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2}(\ln(x) - \ln(a^3))^2, & a^3 \leq x < a^2b \\ -(\ln(x) - \ln(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}))^2 + \frac{3}{4}(\ln(b) - \ln(a))^2, & a^2b \leq x < ab^2 \\ \frac{1}{2}(\ln(b^3) - \ln(x))^2, & ab^2 \leq x \leq b^3 \end{cases}.$$

$$(4) \quad \pi^*([a^4, c]) = \int_{a^4}^c f(x) dx \text{ für alle } c \in [a^4, b^4], \text{ falls } b^4 < a^5, \text{ wobei}$$

$$f(x) = q(1-q)^4 \frac{1}{(b-a)^4}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6}(\ln(x) - \ln(a^4))^3, & a^4 \leq x < a^3b \\ -\frac{1}{2}(\ln(x) - \ln(a^2b^2))^3 + \frac{2}{3}(\ln(b) - \ln(a))^3 \\ \quad - (\ln(b) - \ln(a))(\ln(x) - \ln(a^2b^2))^2, & a^3b \leq x < a^2b^2 \\ \frac{1}{2}(\ln(x) - \ln(a^2b^2))^3 + \frac{2}{3}(\ln(b) - \ln(a))^3 \\ \quad - (\ln(b) - \ln(a))(\ln(x) - \ln(a^2b^2))^2, & a^2b^2 \leq x < ab^3 \\ \frac{1}{6}(\ln(b^4) - \ln(x))^3, & ab^3 \leq x \leq b^4 \end{cases}.$$

$$(5) \quad \pi^*([a^5, c]) = \int_{a^5}^c f(x) dx \text{ für alle } c \in [a^5, b^5], \text{ falls } b^5 < a^6, \text{ wobei}$$

$$f(x) = q(1-q)^5 \frac{1}{(b-a)^5}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{24}(\ln(x) - \ln(a^5))^4, & a^5 \leq x < a^4b \\ -\frac{1}{6}(\ln(x) - \ln(a^4b))^4 + \frac{1}{6}(\ln(b) - \ln(a)) \\ \quad \cdot \left\{ \frac{1}{4}(\ln(b) - \ln(a))^2(\ln(x) - \ln(a^{\frac{9}{2}}b^{\frac{1}{2}})) \right. \\ \quad \left. + (\ln(x) - \ln(a^{\frac{9}{2}}b^{\frac{1}{2}}))^3 \right\}, & a^4b \leq x < a^3b^2 \\ \frac{1}{4}(\ln(x) - \ln(a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}))^4 - \frac{5}{8}(\ln(b) - \ln(a))^2 \\ \quad \cdot \left\{ (\ln(x) - \ln(a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}))^2 - \frac{23}{24}(\ln(b) - \ln(a))^2 \right\}, & a^3b^2 \leq x < a^2b^3 \\ -\frac{1}{6}(\ln(x) - \ln(ab^4))^4 - \frac{1}{6}(\ln(b) - \ln(a)) \\ \quad \cdot \left\{ \frac{1}{4}(\ln(b) - \ln(a))^2(\ln(x) - \ln(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{9}{2}})) \right. \\ \quad \left. + (\ln(x) - \ln(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{9}{2}}))^3 \right\}, & a^2b^3 \leq x < ab^4 \\ \frac{1}{24}(\ln(b^5) - \ln(x))^4, & ab^4 \leq x \leq b^5 \end{cases}.$$

**Beispiel 3.83** Die mit Matlab erzeugte Abbildung 3.2 verdeutlicht die Entwicklung der Dichte  $f$  in den Intervallen  $[a^n, b^n]$ ,  $n = 1, \dots, 5$ . Als Beispiel wurde  $q = \frac{1}{2}$ ,  $a = 4$  und  $b = 5$  angenommen, so daß  $b^5 = 3125 < 4096 = a^6$  erfüllt ist. Betrachtet werden also die disjunkten Intervalle  $[4, 5]$ ,  $[16, 25]$ ,  $[64, 125]$ ,  $[256, 625]$  und  $[1024, 3125]$ .

**Beweis** von Satz 3.82:

(1) Sei  $c \in [a, b]$  und  $b < a^2$ . Es ist

$$\begin{aligned}
 \pi^*([a, c]) &= \int_X P(x, [a, c]) d\pi^*(x) \\
 &\stackrel{1 \notin [a, c]}{=} \int_X (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[\frac{a}{x}, \frac{c}{x}] \cap [a, b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
 &\stackrel{\text{wie (3.11)}}{=} \int_{\{1\}} (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, c]}(y) dy d\pi^*(x) \\
 &= \pi^*({1})(1 - q) \frac{c - a}{b - a} \stackrel{3.77.1.}{=} q(1 - q) \frac{c - a}{b - a}.
 \end{aligned}$$

Die Darstellung über die Dichte  $f$  ergibt sich durch Differentiation.

(2) Sei  $c \in [a^2, b^2]$  und  $b^2 < a^3$ . Es ist

$$\begin{aligned}
 \pi^*([a^2, c]) &= \int_X P(x, [a^2, c]) d\pi^*(x) \\
 &\stackrel{\text{wie (3.11)}}{=} \int_{[a, b]} (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[\frac{a^2}{x}, \frac{c}{x}] \cap [a, b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
 &\stackrel{\frac{a^2}{x} \leq a}{=} \int_{[a, b]} (1 - q) \frac{1}{b - a} \int_X \mathbb{1}_{[a, \frac{c}{x}] \cap [a, b]}(y) dy d\pi^*(x).
 \end{aligned}$$

Nun gilt es, zwei Fälle zu unterscheiden:

(i)  $a \leq \frac{c}{x} \leq b \Leftrightarrow \frac{c}{b} \leq x \leq \frac{c}{a}$ . Da zusätzlich  $a \leq x \leq b$  gilt, ist zu unterscheiden, ob  $\frac{c}{b} \geq a \Leftrightarrow \frac{c}{a} \geq b \Leftrightarrow c \geq ab$  oder  $\frac{c}{a} < b \Leftrightarrow \frac{c}{b} < a \Leftrightarrow c < ab$ .

(ii)  $\frac{c}{x} > b \Leftrightarrow x < \frac{c}{b}$ . Dabei ist  $\frac{c}{b} \geq a \Leftrightarrow c \geq ab$ .

Insgesamt folgt also:

1. Fall:  $c < ab$ : Dann ist  $a \leq \frac{c}{x} \leq b$  für  $a \leq x \leq \frac{c}{a}$ , und  $\frac{c}{x} > b$  nie.

$$\Rightarrow \pi^*([a^2, c]) = \int_{[a, \frac{c}{a}]} (1 - q) \frac{1}{b - a} \left( \frac{c}{x} - a \right) d\pi^*(x)$$

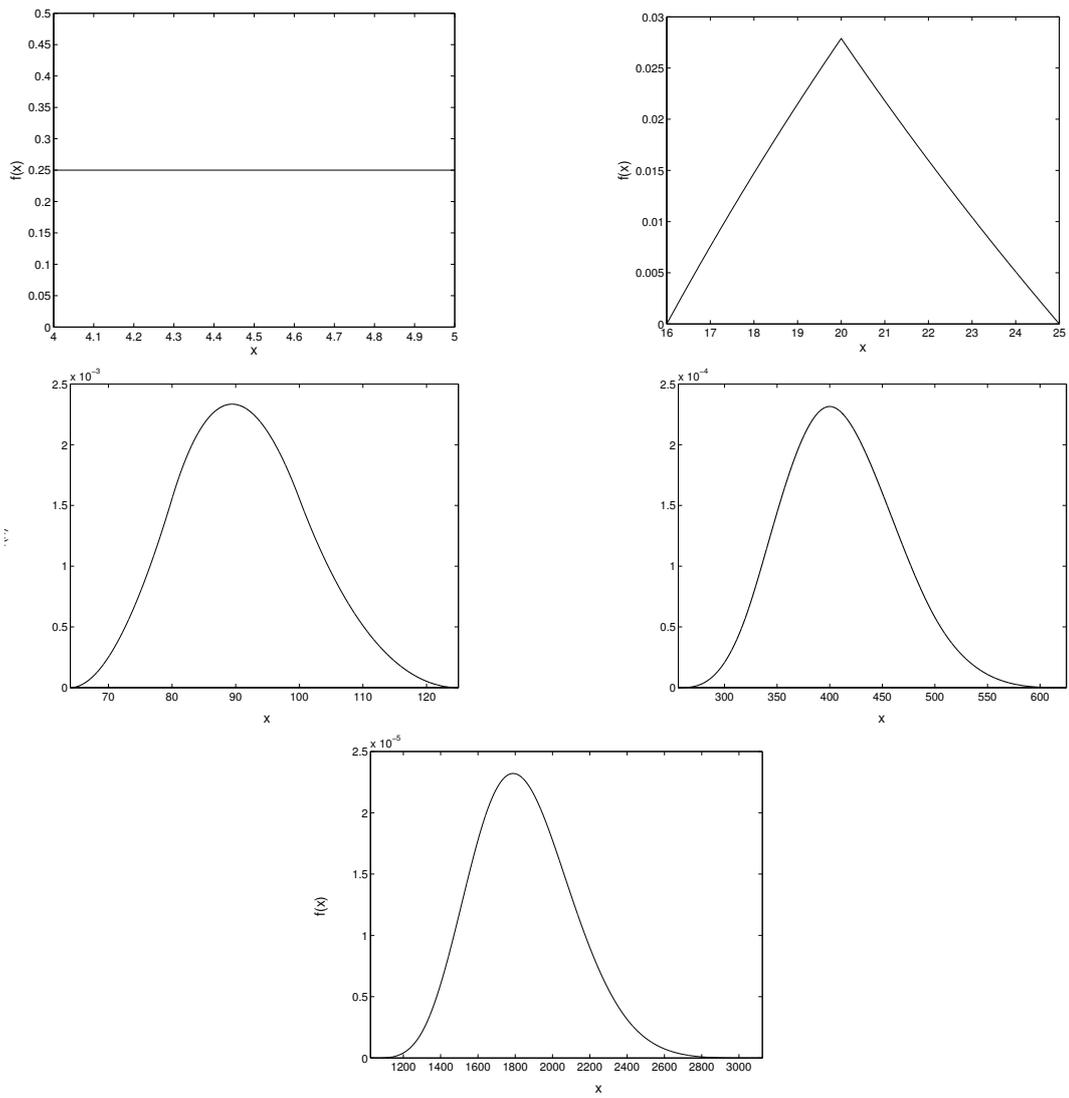


Abbildung 3.2:  $f(x)$  auf  $[a^n, b^n]$  für  $n = 1, \dots, 5$ ;  $q = \frac{1}{2}, a = 4, b = 5$ .

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(1)}{=} \int_a^{\frac{c}{a}} q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{c}{x} - a\right) dx \\
&= q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \left[ c \ln(x) - ax \right]_a^{\frac{c}{a}} \\
&= q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \left\{ c \left( \ln\left(\frac{c}{a}\right) - \ln(a) \right) - (c - a^2) \right\} \\
&= q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \left\{ c(\ln(c) - \ln(a^2)) - (c - a^2) \right\}
\end{aligned}$$

2. Fall:  $c \geq ab$ : Dann ist  $a \leq \frac{c}{x} \leq b$  für  $\frac{c}{b} \leq x \leq b$  und  $\frac{c}{x} > b$  für  $a \leq x < \frac{c}{b}$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi^*([a^2, c]) &= \int_{[a, \frac{c}{b})} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
&\quad + \int_{[\frac{c}{b}, b]} (1-q) \frac{1}{b-a} \left(\frac{c}{x} - a\right) d\pi^*(x) \\
&\stackrel{(1)}{=} \pi^*\left(\left[a, \frac{c}{b}\right)\right)(1-q) + \int_{\frac{c}{b}}^b q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{c}{x} - a\right) dx \\
&\stackrel{(1)}{=} q(1-q)^2 \frac{\frac{c}{b} - a}{b-a} + q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \left[ c \ln(x) - ax \right]_{\frac{c}{b}}^b \\
&= q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \left\{ \frac{1}{b}(c-ab)(b-a) + c(\ln(b^2) - \ln(c)) - ab + \frac{ac}{b} \right\} \\
&= q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \left\{ c(\ln(b^2) - \ln(c)) + (c-ab) - (ab - a^2) \right\}.
\end{aligned}$$

Die Darstellung über die Dichte  $f$  ergibt sich durch Differentiation.

Das Ergebnis ist konsistent mit Satz 3.77, da  $\pi^*([a^2, a^2]) = 0$ ,  $\pi^*([a^2, b^2]) = q(1-q)^2$ .  $f$  ist stetig in  $ab$  mit  $f(ab) = \ln(b) - \ln(a)$ .

(3) Sei  $c \in [a^3, b^3]$  und  $b^3 < a^4$ . Es ist

$$\begin{aligned}
\pi^*([a^3, c]) &= \int_X P(x, [a^3, c]) d\pi^*(x) \\
&\stackrel{\text{wie (3.11)}}{=} \int_{[a^2, b^2]} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[\frac{a^3}{x}, \frac{c}{x}] \cap [a,b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
&\stackrel{\frac{a^3}{x} \leq a}{=} \int_{[a^2, b^2]} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a, \frac{c}{x}] \cap [a,b]}(y) dy d\pi^*(x).
\end{aligned}$$

Nun müssen drei Fälle unterschieden werden, denn:

(i)  $a \leq \frac{c}{x} \leq b \Leftrightarrow \frac{c}{b} \leq x \leq \frac{c}{a}$ . Da zusätzlich  $a^2 \leq x \leq b^2$  gilt, ist zu unterscheiden, ob  $\frac{c}{b} \geq a^2 \Leftrightarrow c \geq a^2 b$  und ob  $\frac{c}{a} < b^2 \Leftrightarrow c < ab^2$ .

(ii)  $\frac{c}{x} > b \Leftrightarrow x < \frac{c}{b}$ . Dabei ist  $\frac{c}{b} \geq a^2 \Leftrightarrow c \geq a^2 b$ .

Insgesamt sind also die drei Fälle  $a^3 \leq c < a^2 b$ ,  $a^2 b \leq c < ab^2$  und  $ab^2 \leq c \leq b^3$  zu unterscheiden. Es gilt:

1. Fall:  $a^3 \leq c < a^2 b$ : Dann ist  $a \leq \frac{c}{x} \leq b$  für  $a^2 \leq x \leq \frac{c}{a}$  und  $\frac{c}{x} > b$  nie.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi^*([a^3, c]) &= \int_{[a^2, \frac{c}{a}]} (1-q) \frac{1}{b-a} \left( \frac{c}{x} - a \right) d\pi^*(x) \\
&\stackrel{(2)}{=} \int_{a^2}^{\frac{c}{a}} q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} (\ln(x) - \ln(a^2)) \left( \frac{c}{x} - a \right) dx \\
&= q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} \left[ \frac{c}{2} (\ln(x))^2 - a x (\ln(x) - 1) \right. \\
&\quad \left. - \ln(a^2) c \ln(x) + a \ln(a^2) x \right]_{a^2}^{\frac{c}{a}} \\
&= \dots \\
&= q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} \left\{ \frac{c}{2} (\ln(c) - \ln(a^3))^2 + (c - a^3) \right. \\
&\quad \left. + c (\ln(a^3) - \ln(c)) \right\}
\end{aligned}$$

2. Fall:  $a^2 b \leq c < ab^2$ : Dann ist  $a \leq \frac{c}{x} \leq b$  für  $\frac{c}{b} \leq x \leq \frac{c}{a}$  und  $\frac{c}{x} > b$  für  $a^2 \leq x < \frac{c}{b}$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi^*([a^3, c]) &= \int_{[a^2, \frac{c}{b})} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
&\quad + \int_{[\frac{c}{b}, \frac{c}{a}]} (1-q) \frac{1}{b-a} \left( \frac{c}{x} - a \right) d\pi^*(x) \\
&\stackrel{(2)}{=} \pi^*([a^2, \frac{c}{b})) (1-q) + \int_{\frac{c}{b}}^{ab} q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} (\ln(x) - \ln(a^2)) \left( \frac{c}{x} - a \right) dx \\
&\quad + \int_{ab}^{\frac{c}{a}} q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} (\ln(b^2) - \ln(x)) \left( \frac{c}{x} - a \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2)}{=} q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^2} \left\{ \frac{c}{b} (\ln(\frac{c}{b}) - \ln(a^2)) - (\frac{c}{b} - a^2) \right\} + q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} \\
&\cdot \left\{ \left[ \frac{c}{2} (\ln(x))^2 - a x (\ln(x) - 1) - \ln(a^2) c \ln(x) + a \ln(a^2) x \right]_{\frac{c}{b}}^{ab} \right. \\
&+ \left. \left[ \ln(b^2) c \ln(x) - \ln(b^2) a x - \frac{1}{2} c (\ln(x))^2 + a x (\ln(x) - 1) \right]_{ab}^{\frac{c}{a}} \right\} \\
&= \dots = q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} \\
&\cdot \left\{ -2c + 3a^2b - a^3 + c \ln(a^2) \ln(\frac{c}{b}) - \ln(a^2) c \ln(ba) + \ln(b^2) c \ln(\frac{c}{a}) \right. \\
&- \ln(b^2) c \ln(ba) + c \ln(\frac{c}{b}) - \ln(a^2) c + c (\ln(ba))^2 - \frac{1}{2} c (\ln(\frac{c}{b}))^2 \\
&+ a^2b \ln(a^2) - 2a^2b \ln(ba) + a^2b \ln(b^2) + c \ln(\frac{c}{a}) - \ln(b^2) c - \frac{1}{2} c (\ln(\frac{c}{a}))^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

3. Fall:  $ab^2 \leq c \leq b^3$ : Dann ist  $a \leq \frac{c}{x} \leq b$  für  $\frac{c}{b} \leq x \leq b^2$  und  $\frac{c}{x} > b$  für  $a^2 \leq x < \frac{c}{b}$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi^*([a^3, c]) &= \int_{[a^2, \frac{c}{b}]} (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbf{1}_{[a,b]}(y) dy d\pi^*(x) \\
&+ \int_{[\frac{c}{b}, b^2]} (1-q) \frac{1}{b-a} \left( \frac{c}{x} - a \right) d\pi^*(x) \\
&\stackrel{(2)}{=} \pi^*([a^2, \frac{c}{b}]) (1-q) + \int_{\frac{c}{b}}^{b^2} q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} (\ln(b^2) - \ln(x)) \left( \frac{c}{x} - a \right) dx \\
&\stackrel{(2)}{=} q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^2} \left\{ \frac{c}{b} (\ln(b^2) - \ln(\frac{c}{b})) + (\frac{c}{b} - ab) - (ab - a^2) \right\} \\
&+ q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} \left[ \ln(b^2) c \ln(x) - \ln(b^2) a x - \frac{1}{2} c (\ln(x))^2 \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. + a x (\ln(x) - 1) \right]_{\frac{c}{b}}^{b^2} \\
&= \dots = q(1-q)^3 \frac{1}{(b-a)^3} \left\{ \frac{1}{2} c (\ln(\frac{c}{b}))^2 - c \ln(b^2) \ln(\frac{c}{b}) + \frac{1}{2} (\ln(b^2))^2 c \right. \\
&\quad \left. - 3 a b^2 - c \ln(\frac{c}{b}) + c \ln(b^2) + c + 3 a^2 b - a^3 \right\}
\end{aligned}$$

Die Darstellung über die Dichte  $f$  ergibt sich durch Differentiation.

(4) und (5): Länglich, analog dem Beweis von (3). □

In den Randbereichen der Intervalle  $[a^n, b^n]$ , also für  $[a^n, a^{n-1}b]$  und  $[ab^{n-1}, b^n]$  lassen sich offensichtlich Gesetzmäßigkeiten erkennen. Für die dazwischenliegenden Anteile der Intervalle  $[a^n, b^n]$  läßt sich eine Dichte iterativ bestimmen.

**Satz 3.84** Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b^n < a^{n+1}$

$$\pi^*([a^n, c]) = \int_{a^n}^c f(x) dx \text{ für alle } c \in [a^n, b^n],$$

wobei mit der Bezeichnung  $f_k^n(x) := f(x) |_{I_k^n}$ ,  $I_k^n := [a^{n+1-k}b^{k-1}, a^{n-k}b^k]$ ,

$$(1) f_1^n(x) = q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-1)!} (\ln(x) - \ln(a^n))^{n-1},$$

$$(2) f_k^n(x) = (1-q) \frac{1}{b-a} \left\{ \int_{\frac{x}{b}}^{a^{n-k}b^{k-1}} f_{k-1}^{n-1}(y) \frac{1}{y} dy + \int_{a^{n-k}b^{k-1}}^{\frac{x}{a}} f_k^{n-1}(y) \frac{1}{y} dy \right\}, \quad 2 \leq k \leq n-1,$$

$$(3) f_n^n(x) = q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-1)!} (\ln(b^n) - \ln(x))^{n-1}.$$

**Beweis:** Beweis der Darstellung von  $\pi^*([a^n, c])$  durch vollständige Induktion.

IA:  $n = 1$ :

$$(1) f(x) \stackrel{3.82(1)}{=} q(1-q) \frac{1}{b-a} = q(1-q) \frac{1}{b-a} \frac{1}{0!} (\ln(x) - \ln(a))^0 \text{ für alle } x \in I_1^1.$$

(2) Die Aussage für  $2 \leq k \leq n-1$  ist eine Aussage über die leere Menge und deshalb wahr.

$$(3) f(x) \stackrel{3.82(1)}{=} q(1-q) \frac{1}{b-a} = q(1-q) \frac{1}{b-a} \frac{1}{0!} (\ln(b) - \ln(x))^0 \text{ für alle } x \in I_n^1.$$

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , und die Aussage erfüllt für  $n-1$ .

IS: (1) Sei  $x$  zunächst in  $I_1^n$ , also  $a^n \leq x \leq a^{n-1}b$ .

$$\begin{aligned} \pi^*([a^n, x]) &\stackrel{(3.11), IV}{=} \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} f(y) (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a, b] \cap [\frac{a^n}{y}, \frac{x}{y}]}(z) dz dy \\ &\stackrel{\frac{x}{y} \leq b}{=} \int_{a^{n-1}}^{\frac{x}{a}} f(y) (1-q) \frac{1}{b-a} \left(\frac{x}{y} - a\right) dy \\ &\stackrel{IV}{=} q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-2)!} \int_{a^{n-1}}^{\frac{x}{a}} (\ln(y) - \ln(a^{n-1}))^{n-2} \left(\frac{x}{y} - a\right) dy \end{aligned}$$

Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (und mit der Produktregel) gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_{a^{n-1}}^{\frac{x}{a}} (\ln(y) - \ln(a^{n-1}))^{n-2} \left(\frac{x}{y} - a\right) dy & \quad (3.12) \\
&= \int_{a^{n-1}}^{\frac{x}{a}} (\ln(y) - \ln(a^{n-1}))^{n-2} \frac{1}{y} dy + x (\ln(\frac{x}{a}) - \ln(a^{n-1}))^{n-2} \frac{1}{a} \\
&\quad - (\ln(\frac{x}{a}) - \ln(a^{n-1}))^{n-2} a \frac{1}{a} \\
&= \left[ \frac{1}{n-1} (\ln(y) - \ln(a^{n-1}))^{n-1} \right]_{a^{n-1}}^{\frac{x}{a}} = \frac{1}{n-1} (\ln(x) - \ln(a^n))^{n-1}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_1^n(x) = q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-1)!} (\ln(x) - \ln(a^n))^{n-1}$$

(2) Ist  $n = 2$ , so ist die Aussage für  $2 \leq k \leq n - 1$  eine Aussage über die leere Menge und deswegen wahr. Ist  $n \geq 3$ , so sei nun  $x \in I_k^n$ , also  $a^{n+1-k}b^{k-1} \leq x \leq a^{n-k}b^k$ , mit  $2 \leq k \leq n - 1$ .

$$\pi^*([a^n, x]) \stackrel{(3.11)}{=} \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} f(y) (1-q) \frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b] \cap [a, \frac{x}{y}]}(z) dz dy$$

1. Es ist  $a \leq \frac{x}{y} \leq b \Leftrightarrow \frac{x}{b} \leq y \leq \frac{x}{a}$ . Wegen  $a^{n+1-k}b^{k-1} \leq x \leq a^{n-k}b^k$ ,  $2 \leq k \leq n - 1$ , ist dabei  $\frac{x}{a} \leq b^{n-1}$  und  $\frac{x}{b} \geq a^{n-1}$ .
2. Es ist  $\frac{x}{y} > b \Leftrightarrow y < \frac{x}{b}$ . Wegen  $a^{n+1-k}b^{k-1} \leq x \leq a^{n-k}b^k$ ,  $2 \leq k \leq n - 1$ , ist dabei  $\frac{x}{b} \geq a^{n-1}$ .

$$\Rightarrow \pi^*([a^n, x]) = \int_{a^{n-1}}^{\frac{x}{b}} f(y) (1-q) dy + \int_{\frac{x}{b}}^{\frac{x}{a}} f(y) (1-q) \frac{1}{b-a} \left(\frac{x}{y} - a\right) dy$$

Wegen  $a^{n+1-k}b^{k-1} \leq x \leq a^{n-k}b^k$  ist  $a^{n+1-k}b^{k-2} \leq \frac{x}{b} \leq a^{n-k}b^{k-1}$  und  $a^{n-k}b^{k-1} \leq \frac{x}{a} \leq a^{n-k-1}b^k$ .

$$\Rightarrow f_k^n(x) = (1-q) \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{i=1}^{k-2} \left( \int_{a^{n-i}b^{i-1}}^{a^{n-i-1}b^i} f_i^{n-1}(y) dy \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{a^{n+1-k}b^{k-2}}^{\frac{x}{b}} f_{k-1}^{n-1}(y)dy + \frac{1}{b-a} \int_{\frac{x}{b}}^{a^{n-k}b^{k-1}} f_{k-1}^{n-1}(y)\left(\frac{x}{y} - a\right)dy \\
& + \frac{1}{b-a} \int_{a^{n-k}b^{k-1}}^{\frac{x}{a}} f_k^{n-1}(y)\left(\frac{x}{y} - a\right)dy \Big\} \\
= & (1-q) \left\{ f_{k-1}^{n-1}\left(\frac{x}{b}\right)\frac{1}{b} + \frac{1}{b-a} \int_{\frac{x}{b}}^{a^{n-k}b^{k-1}} f_{k-1}^{n-1}(y)\frac{1}{y}dy \right. \\
& - \frac{1}{b-a} x f_{k-1}^{n-1}\left(\frac{x}{b}\right)\frac{1}{x}\frac{1}{b} + \frac{1}{b-a} a f_{k-1}^{n-1}\left(\frac{x}{b}\right)\frac{1}{b} \\
& + \frac{1}{b-a} \int_{a^{n-k}b^{k-1}}^{\frac{x}{a}} f_k^{n-1}(y)\frac{1}{y}dy + \frac{1}{b-a} x f_k^{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{x}\frac{1}{a} \\
& \left. - \frac{1}{b-a} a f_k^{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}\frac{1}{a} \right\} \\
= & (1-q)\frac{1}{b-a} \left\{ \int_{\frac{x}{b}}^{a^{n-k}b^{k-1}} f_{k-1}^{n-1}(y)\frac{1}{y}dy + \int_{a^{n-k}b^{k-1}}^{\frac{x}{a}} f_k^{n-1}(y)\frac{1}{y}dy \right\}
\end{aligned}$$

(3) Sei nun  $x \in I_n^n$ .

$$\begin{aligned}
f(x) & = \frac{d}{dx} \pi^*([a^n, x]) \stackrel{(3.11)}{=} \frac{d}{dx} \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} f(y)(1-q)\frac{1}{b-a} \int_X \mathbb{1}_{[a,b] \cap [a, \frac{x}{y}]}(z) dz dy \\
& = \frac{d}{dx} \left\{ \int_{a^{n-1}}^{\frac{x}{b}} f(y)(1-q)dy + \int_{\frac{x}{b}}^{b^{n-1}} f(y)(1-q)\frac{1}{b-a}\left(\frac{x}{y} - a\right)dy \right\} \\
& \stackrel{IV,3.774}{=} \frac{d}{dx} \left\{ q(1-q)^n \left( 1 - \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \int_{\frac{x}{b}}^{b^{n-1}} \frac{1}{(n-2)!} (\ln(b^{n-1}) - \ln(y))^{n-2} dy \right) \right. \\
& \quad \left. + q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \int_{\frac{x}{b}}^{b^{n-1}} \frac{1}{(n-2)!} (\ln(b^{n-1}) - \ln(y))^{n-2} \left(\frac{x}{y} - a\right) dy \right\} \\
& = q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{d}{dx} \left( (b-a)^n \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{x}{b}}^{b^{n-1}} \frac{1}{(n-2)!} (\ln(b^{n-1}) - \ln(y))^{n-2} \left(\frac{x}{y} - b\right) dy \\
= & q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-2)!} \\
& \cdot \frac{d}{dx} \left( (-1)(-1)^{n-2} \int_{b^{n-1}}^{\frac{x}{b}} (\ln(y) - \ln(b^{n-1}))^{n-2} \left(\frac{x}{y} - b\right) dy \right) \\
\stackrel{(3.12)}{=} & q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (\ln(x) - \ln(b^n))^{n-1} \\
= & q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-1)!} (\ln(b^n) - \ln(x))^{n-1}
\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung.  $\square$

Es läßt sich nun prinzipiell die Dichte für die disjunkten Intervalle iterativ bestimmen. Die nächste Folgerung tut dies exemplarisch für  $k = 2$ .

**Folgerung 3.85** *Mit den Bezeichnungen aus Satz 3.84 gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , mit  $b^n < a^{n+1}$ ,*

$$\begin{aligned}
f_2^n(x) & = q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-1)!} \\
& \cdot \left\{ - (n-2) (\ln(x) - \ln(a^{n-1}b))^{n-1} - (\ln(x) - \ln(a^{n-2}b^2))^{n-1} \right. \\
& \left. + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2j} (\ln(b) - \ln(a))^{2j} (\ln(x) - \ln(a^{n-1}b))^{n-1-2j} \right\}.
\end{aligned}$$

**Beweis:** Beweis durch vollständige Induktion.

IA:  $n = 2$ :  $f_2^2 = q(1-q)^2 \frac{1}{(b-a)^2} \{ \ln(b^2) - \ln(x) \}$  nach 3.82 (2).

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , und die Aussage erfüllt für  $n-1$ .

IS:

$$\begin{aligned}
f_2^n(x) & \stackrel{3.84(2)}{=} (1-q) \frac{1}{b-a} \left\{ \int_{\frac{x}{b}}^{a^{n-2}b} f_1^{n-1}(y) \frac{1}{y} dy + \int_{a^{n-2}b}^{\frac{x}{a}} f_2^{n-1}(y) \frac{1}{y} dy \right\} \\
& \stackrel{3.84(1), IV}{=} (1-q) \frac{1}{b-a} \left\{ \int_{\frac{x}{b}}^{a^{n-2}b} q(1-q)^{n-1} \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \frac{1}{(n-2)!} \right. \\
& \quad \left. \cdot (\ln(y) - \ln(a^{n-1}))^{n-2} \frac{1}{y} dy + q(1-q)^{n-1} \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \frac{1}{(n-2)!} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_{a^{n-2}b}^{\frac{x}{a}} \left[ -(n-3)(\ln(y) - \ln(a^{n-2}b))^{n-2} \right. \\
& \quad \left. - (\ln(y) - \ln(a^{n-3}b^2))^{n-2} \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2}{2j} (\ln(b) - \ln(a))^{2j} (\ln(y) - \ln(a^{n-2}b))^{n-2-2j} \right] \frac{1}{y} dy \Big\} \\
= & \quad q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \left\{ \left[ \frac{1}{(n-1)!} (\ln(y) - \ln(a^{n-1}))^{n-1} \right]_{\frac{x}{b}}^{a^{n-2}b} \right. \\
& \quad + \frac{1}{(n-2)!} \left[ -\frac{n-3}{n-1} (\ln(y) - \ln(a^{n-2}b))^{n-1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{n-1} (\ln(y) - \ln(a^{n-3}b^2))^{n-1} \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \frac{(n-2)!}{(2j)!(n-2-2j)!} \frac{1}{n-1-2j} (\ln(b) - \ln(a))^{2j} \right. \\
& \quad \left. \cdot (\ln(y) - \ln(a^{n-2}b))^{n-1-2j} \right]_{a^{n-2}b}^{\frac{x}{a}} \Big\} \\
= & \quad q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-1)!} \left\{ (\ln(b) - \ln(a))^{n-1} \right. \\
& \quad \left. - (\ln(x) - \ln(a^{n-1}b))^{n-1} - (n-3)(\ln(x) - \ln(a^{n-1}b))^{n-1} \right. \\
& \quad \left. - (\ln(x) - \ln(a^{n-2}b^2))^{n-1} + (\ln(a) - \ln(b))^{n-1} \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2j} (\ln(b) - \ln(a))^{2j} (\ln(x) - \ln(a^{n-1}b))^{n-1-2j} \right\} \\
= & \quad q(1-q)^n \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(n-1)!} \left\{ -(n-2)(\ln(x) - \ln(a^{n-1}b))^{n-1} \right. \\
& \quad \left. - (\ln(x) - \ln(a^{n-2}b^2))^{n-1} \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2j} (\ln(b) - \ln(a))^{2j} (\ln(x) - \ln(a^{n-1}b))^{n-1-2j} \right\},
\end{aligned}$$

denn für gerade  $n$  ist  $(\ln(b) - \ln(a))^{n-1} + (\ln(a) - \ln(b))^{n-1} = 0$  und  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ ; für ungerade  $n$  ist  $(\ln(b) - \ln(a))^{n-1} + (\ln(a) - \ln(b))^{n-1} = 2(\ln(b) - \ln(a))^{n-1}$  der  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ -te Summand und  $\frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + 1$  eine ganze Zahl.

Die Behauptung folgt mit vollständiger Induktion.  $\square$

Bis jetzt wurde noch nicht Satz 3.71 benutzt, der eine explizite Darstellung von

$\pi^*$  erlauben sollte. Der folgende Satz ergibt zwar eine Darstellung für  $\pi^*$ , aus der sich einige bisherige Resultate ebenfalls folgern lassen und die die Struktur von  $\pi^*$  deutlich werden läßt - explizit im engeren Sinne läßt sie sich jedoch leider nicht nennen.

**Satz 3.86** *Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt für alle  $A \in \mathcal{B}(X)$*

$$\pi^*(A) = q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-q)^i}{(b-a)^i} \int_X \cdots \int_X \int_{\frac{A}{z_1 \cdots z_{i-1}}} \mathbb{1}_{[a,b]}(z_i) \cdots \mathbb{1}_{[a,b]}(z_1) dz_i \cdots dz_1.$$

**Beweis:** Nach Satz 3.71 gilt

$$\begin{aligned} \pi^*(A) &= q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \int_X \cdots \int_X \mu\left(\frac{A}{z_1 \cdots z_i}\right) d\mu(z_i) \cdots d\mu(z_2) d\delta_1(z_1) \\ &= q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \int_X \cdots \int_X \int_{\frac{A}{z_2 \cdots z_i}} d\mu(z_{i+1}) d\mu(z_i) \cdots d\mu(z_2) \\ &= q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \int_X \cdots \int_X \int_{\frac{A}{z_1 \cdots z_{i-1}}} d\mu(z_i) \cdots d\mu(z_1) \\ &= q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-q)^i}{(b-a)^i} \int_X \cdots \int_X \int_{\frac{A}{z_1 \cdots z_{i-1}}} \mathbb{1}_{[a,b]}(z_i) \cdots \mathbb{1}_{[a,b]}(z_1) dz_i \cdots dz_1. \end{aligned}$$

□

Man überlegt sich leicht, daß in dieser Darstellung der  $n$ -te Term der Summe genau dann ungleich Null ist, wenn der Schnitt von  $A$  mit  $[a^n, b^n]$  nicht leer ist. Somit ergibt Satz 3.86 eine Zerlegung der Art

$$\pi^*(A) = q \sum_{i=0}^{\infty} \pi'(A \cap [a^i, b^i]),$$

wobei  $\pi'$  auf den disjunkten Intervallen mit  $\pi^*$  übereinstimmt. Also „addiert“ sich  $\pi^*$  in den Überlappungsgebieten von Intervallen  $[a^i, b^i]$  tatsächlich „auf“, wie bereits vermutet.

Leider scheitert eine explizite Darstellung von  $\pi^*$  in den Intervallen - z.B. über eine Dichte - genau wie beim Ansatz über die Invarianzgleichung an der  $n$ -fachen Fallunterscheidung, die für das Intervall  $[a^n, b^n]$  auftritt. Die „Stückelung“ der Dichte in den Intervallen, die auch in früheren Sätzen schon auftrat,

liegt nicht am spezifischen Ansatz zur Berechnung von  $\pi^*$ , sondern an der speziellen Form von  $\mu$  mit dem beschränkten Träger auf  $[a, b]$ . Satz 3.86 bestätigt noch einmal diese Schwierigkeiten bei der Bestimmung einer expliziten Dichte für die disjunkten Intervalle.

Wenn es auch schwierig ist, eine Dichte für die asymptotische invariante Verteilung explizit zu bestimmen, so wird mit den Resultaten in diesem Abschnitt doch deutlich, daß die Dichte keinem Powerlaw entspricht. So ist z.B. die Dichte auf den Intervallen  $(b^n, a^{n+1})$  für  $b^n < a^{n+1}$  gleich Null, und die Sätze 3.82 und 3.84 sowie Folgerung 3.85 zeigen deutlich ein Ansteigen der Dichte in den disjunkten Intervallen zur (geometrischen) Mitte hin. Es gibt also kein generelles exponentielles Abfallen der Dichte, wie dies für ein Powerlaw der Fall sein müßte.

Eine Art exponentiellen Abfalls läßt sich höchstens für das Maß auf den gesamten Intervallen  $[a^n, b^n]$  erkennen, zumindest läßt sich  $f(a^n) := \pi^*([a^n, b^n])$  nach unten durch das Powerlaw  $q(1-q)^n = q(a^n)^{-\log_a(\frac{1}{1-q})}$  begrenzen. Nach oben ist die Begrenzung hingegen nur mit der Differenz zweier nicht ganz exponentieller Funktionen möglich (die Gaußklammern in den Exponenten ergeben, wie in Abbildung 3.1 ersichtlich, Sprünge in den Exponenten). Ein exaktes Powerlaw gibt es also nur in dem Bereich, wo sich der Spezialfall 2.2 direkt verallgemeinern läßt - bei den disjunkten Intervallen. Eine mögliche Annäherung der Dichte von  $\pi^*$  an ein Powerlaw für große  $x$ -Werte wird im Kapitel 4 numerisch untersucht.

### 3.7 Exponentialverteilung für den Übergangskern

Sei wieder  $X = \mathbb{R}^{>0}$ . Seien  $\lambda > 0$  und  $\mu$  die verschobene Exponentialverteilung auf  $[1, \infty)$ , d.h.

$$\mu(A) = \int_A f(y-1)dy \quad \forall A \in \mathcal{B}(X),$$

$$\text{wobei } f(z) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda z), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

Die verschobene Exponentialverteilung wurde in diesem Fall gewählt, um Wachstum zwischen den Resetereignissen zu simulieren. (Multiplikative Faktoren  $\geq 1$ .) Definiere den zu  $\Phi$  gehörigen Übergangskern als

$$\begin{aligned} P(x, A) &= q\delta_1(A) + (1-q)\mu\left(\frac{A}{x}\right) \\ &= q\delta_1(A) + (1-q) \int_{\frac{A}{x}} f(y-1)dy \quad \forall x \in X, A \in \mathcal{B}(X). \end{aligned}$$

Dies entspricht also dem Fall eines Resets auf 1 und eines multiplikativen Faktors mit Exponentialverteilung im Intervall  $[1, \infty)$ .  
Für  $P$  läßt sich zunächst festhalten:

**Lemma 3.87** *Seien  $1 < a < b$ . Für oben definiertes  $P$  gilt dann für alle  $z \in X, x \geq 1$*

1.  $P(z, \{1\}) = q,$
2.  $P(x, (1, x]) = 0,$
3.  $P(x, (x, \infty)) = 1 - q,$
4. 
$$P(x, (1, b]) = \begin{cases} (1 - q)(1 - \exp(\lambda - \lambda \frac{b}{x})), & 1 \leq x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases},$$
5. 
$$P(x, (a, b]) = \begin{cases} (1 - q)(\exp(\lambda - \lambda \frac{a}{x}) - \exp(\lambda - \lambda \frac{b}{x})), & 1 \leq x < a \\ (1 - q)(1 - \exp(\lambda - \lambda \frac{b}{x})), & a \leq x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}.$$

**Beweis:** 1.  $P(z, \{1\}) = q\delta_1(\{1\}) + (1 - q) \int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{z}} \lambda \exp(-\lambda(y - 1))dy = q.$

2. Für  $x = 1$  ist die Aussage wegen  $(1, 1] = \emptyset$  und der Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes von  $P(x, \cdot)$  trivial. Für  $x > 1$  gilt  $P(x, (1, x]) = (1 - q) \int_{\frac{1}{x}}^1 f(y - 1)dy = (1 - q) \int_{\frac{1}{x}-1}^0 f(y)dy = 0$  nach Definition von  $f$ .

3.  $P(x, (x, \infty)) = (1 - q) \int_1^{\infty} f(y - 1) = (1 - q) \int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda y)dy = 1 - q.$

4.  $1 \notin (1, b]$ , also

$$\begin{aligned} P(x, (1, b]) &= (1 - q) \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{b}{x}} f(y - 1)dy = (1 - q) \int_{\frac{1}{x}-1}^{\frac{b}{x}-1} f(y)dy \\ &= (1 - q) \int_0^{\frac{b}{x}-1} \lambda \exp(-\lambda y)dy = (1 - q) [-\exp(-\lambda y)]_0^{\frac{b}{x}-1} \\ &= (1 - q)(1 - \exp(\lambda - \lambda \frac{b}{x})). \end{aligned}$$

5. Folgt sofort aus 4. mit  $P(x, (a, b]) = P(x, (1, b]) - P(x, (1, a])$ . □

Interessant ist nun das asymptotische Verhalten der durch  $P$  definierten Markovkette  $\Phi$ . Direkt läßt sich die Aufteilung des asymptotischen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\pi^*$  auf  $(0, 1)$ ,  $\{1\}$  und  $(1, \infty)$  bestimmen:

**Lemma 3.88** Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt

1.  $\pi^*((0, 1)) = 0$ ,
2.  $\pi^*({1}) = q$ ,
3.  $\pi^*((1, \infty)) = 1 - q$ .

**Beweis:**

1. 
$$\begin{aligned} \pi^*((0, 1)) &= \int_X P(x, (0, 1)) d\pi^*(x) \\ &= \int_{(0,1)} P(x, (0, 1)) d\pi^*(x) + \int_{[1,\infty)} P(x, (0, 1)) d\pi^*(x) \\ &\leq \int_{(0,1)} (1 - P(x, \{1\})) d\pi^*(x) + \int_{[1,\infty)} (1 - P(x, \{1\}) - P(x, (x, \infty))) d\pi^*(x) \\ &\stackrel{3.87}{=} (1 - q)\pi^*((0, 1)) \Rightarrow \pi^*((0, 1)) = 0, \text{ da } q \in (0, 1). \end{aligned}$$
2. 
$$\pi^*({1}) = \int_X P(x, \{1\}) d\pi^*(x) \stackrel{3.87.1.}{=} \int_X q d\pi^*(x) = q.$$
3. 
$$\pi^*((1, \infty)) = \pi^*(X) - \pi^*((0, 1)) - \pi^*({1}) \stackrel{1.,2.}{=} 1 - q.$$

□

Wie im Fall der Gleichverteilung 3.6 ist also auch hier  $\pi^*((0, 1)) = 0$ , unabhängig davon, wo die Kette startet (z.B. in  $(0, 1)$ ). Dies ist plausibel, da bei einem Reset auf 1 anschließend  $(0, 1)$  nicht mehr erreichbar ist.

Eine explizite Darstellung von  $\pi^*$  auf  $(1, \infty)$  über die Invarianzgleichung scheitert daran, daß sich Gleichungen der Art

$$\begin{aligned} \pi^*((1, M]) &= \int_X P(x, (1, M]) d\pi^*(x) \\ \stackrel{s.u.}{\Leftrightarrow} \pi^*((1, M]) &= (1 - q) \left(1 - \exp(\lambda - \lambda M)\right) - \frac{1 - q}{q} \int_{(1, M]} \exp(\lambda - \lambda \frac{M}{x}) d\pi^*(x) \end{aligned}$$

nicht so einfach auflösen lassen. Immerhin lassen sich hier noch Abschätzungen angeben.

**Satz 3.89** Seien  $M, a, b \in [1, \infty)$  und  $a < b$ . Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt dann

1.  $\pi^*((1, M]) \geq q(1 - q)(1 - \exp(\lambda - \lambda M))$ ,

$$\begin{aligned}
& \pi^*((1, M]) \leq 1 - q - \frac{(1 - q) \exp(\lambda - \lambda M)}{(1 - q) \exp(\lambda - \lambda M) + q}, \\
2. \quad & \pi^*((M, \infty)) \geq \frac{(1 - q) \exp(\lambda - \lambda M)}{(1 - q) \exp(\lambda - \lambda M) + q}, \\
& \pi^*((M, \infty)) \leq (1 - q)^2 + q(1 - q) \exp(\lambda - \lambda M), \\
3. \quad & \pi^*((a, b]) \geq \frac{(1 - q) \exp(\lambda - \lambda a)}{(1 - q) \exp(\lambda - \lambda a) + q} - (1 - q)^2 - q(1 - q) \exp(\lambda - \lambda b), \\
& \pi^*((a, b]) \leq (1 - q)^2 + q(1 - q) \exp(\lambda - \lambda a) - \frac{(1 - q) \exp(\lambda - \lambda b)}{(1 - q) \exp(\lambda - \lambda b) + q}.
\end{aligned}$$

**Beweis:** 1. Für  $M = 1$  folgt die Behauptung sofort aus  $\pi^*((1, 1]) = \pi^*(\emptyset) = 0$ . Sei nun  $M > 1$ . Das asymptotische invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  muß die Invarianzgleichung für jedes Intervall  $(1, M]$ ,  $M \in (1, \infty)$ , erfüllen:

$$\begin{aligned}
\pi^*((1, M]) &= \int_X P(x, (1, M]) d\pi^*(dx) \stackrel{3.874.}{=} \int_{[1, M]} P(x, (1, M]) d\pi^*(dx) \\
&\stackrel{3.874.}{=} \pi^*({1})P(1, (1, M]) + \int_{(1, M]} (1 - q) \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{x}\right)\right) d\pi^*(dx) \\
&\stackrel{3.874.}{=} q(1 - q) \left(1 - \exp(\lambda - \lambda M)\right) + (1 - q) \pi^*((1, M]) \\
&\quad - (1 - q) \int_{(1, M]} \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{x}\right) d\pi^*(x) \\
\Rightarrow \pi^*((1, M]) &= (1 - q) \left(1 - \exp(\lambda - \lambda M)\right) - \frac{1 - q}{q} \int_{(1, M]} \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{x}\right) d\pi^*(x).
\end{aligned}$$

Für  $1 < x \leq M$  ist  $\exp(\lambda - \lambda M) < \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{x}\right) \leq 1$ . Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\pi^*((1, M]) &\geq (1 - q) \left(1 - \exp(\lambda - \lambda M)\right) - \frac{1 - q}{q} \pi^*((1, M]) \\
\Leftrightarrow \pi^*((1, M]) \left(1 + \frac{1 - q}{q}\right) &\geq (1 - q) \left(1 - \exp(\lambda - \lambda M)\right) \\
\Leftrightarrow \pi^*((1, M]) &\geq q(1 - q) \left(1 - \exp(\lambda - \lambda M)\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\pi^*((1, M]) &< (1 - q) \left(1 - \exp(\lambda - \lambda M)\right) - \frac{1 - q}{q} \exp(\lambda - \lambda M) \pi^*((1, M]) \\
\Leftrightarrow \pi^*((1, M]) \left(1 + \frac{1 - q}{q} \exp(\lambda - \lambda M)\right) &< (1 - q) \left(1 - \exp(\lambda - \lambda M)\right) \\
\Leftrightarrow \pi^*((1, M]) &< \frac{q(1 - q)(1 - \exp(\lambda - \lambda M))}{q + (1 - q) \exp(\lambda - \lambda M)}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \pi^*((1, M]) < \frac{(1-q)(q + (1-q)\exp(\lambda - \lambda M)) - (1-q)\exp(\lambda - \lambda M)}{q + (1-q)\exp(\lambda - \lambda M)}$$

$$\Leftrightarrow \pi^*((1, M]) < 1 - q - \frac{(1-q)\exp(\lambda - \lambda M)}{q + (1-q)\exp(\lambda - \lambda M)}.$$

2.  $\pi^*((1, \infty)) = 1 - q$  nach Lemma 3.88 3. Die Behauptung folgt sofort mit Teil 1.

3.  $\pi^*((a, b]) = \pi^*((1, b]) - \pi^*((1, a])$ . Die Behauptung folgt aus Teil 1.  $\square$

**Bemerkung 3.90** *Beide Grenzen in 3.89 1. sind streng monoton steigend in  $M$  und konvergieren gegen 0 für  $M \downarrow 1$ . Die obere Grenze konvergiert gegen  $(1 - q)$  für  $M \rightarrow \infty$ , nach Lemma 3.88 2. ein Indiz, daß diese Abschätzung nicht „unnötig viel verschenkt“. Die untere Grenze hingegen konvergiert gegen  $q(1 - q)$  für  $M \rightarrow \infty$ , liegt also nach Lemma 3.88 2. für  $M \rightarrow \infty$  deutlich unter dem tatsächlichen Wert. Die Abschätzung ist umso „besser“, je näher  $q$  an der 1 ist.*

*Entsprechend sind beide Grenzen in 3.89 3. streng monoton fallend in  $a$ , streng monoton steigend in  $b$  und die beiden Grenzen konvergieren für  $a \downarrow 1, b \rightarrow \infty$  gegen  $(1 - q)$  bzw.  $q(1 - q)$ .*

*Da die Menge  $E = \{1\} \cup \{(a, b] \mid a, b \in [1, \infty), a < b\}$  ein Erzeugendensystem für die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $[1, \infty)$  bildet, läßt sich auf jeden Fall mit Lemma 3.88 1., 2. und Satz 3.89 3. das Maß  $\pi^*$  jeder Menge aus  $\mathcal{B}(X)$  prinzipiell abschätzen.*

**Beispiel 3.91** *Die mit Matlab erzeugte Abbildung 3.3 zeigt exemplarisch den Verlauf der Abschätzungen aus Satz 3.89 2. für  $\lambda = 2$  und  $q = \frac{3}{4}$  bzw.  $q = \frac{1}{2}$ . Deutlich wird auch, daß für den größeren  $q$ -Wert die Grenzen näher zusammenliegen.*

Auch in diesem Fall ergibt Satz 3.71 eine Darstellung für  $\pi^*$ , die allerdings ebenfalls nicht als explizit bezeichnet werden kann.

**Satz 3.92** *Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt*

$$\pi^*(A) = q\delta_1(A) + q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \lambda^i \int_1^{\infty} \dots \int_1^{\infty} \int_{\frac{A}{z_1 \dots z_{i-1}} \cap [1, \infty)} \exp(\lambda - \lambda z_i) \dots \exp(\lambda - \lambda z_1) dz_i \dots dz_1.$$

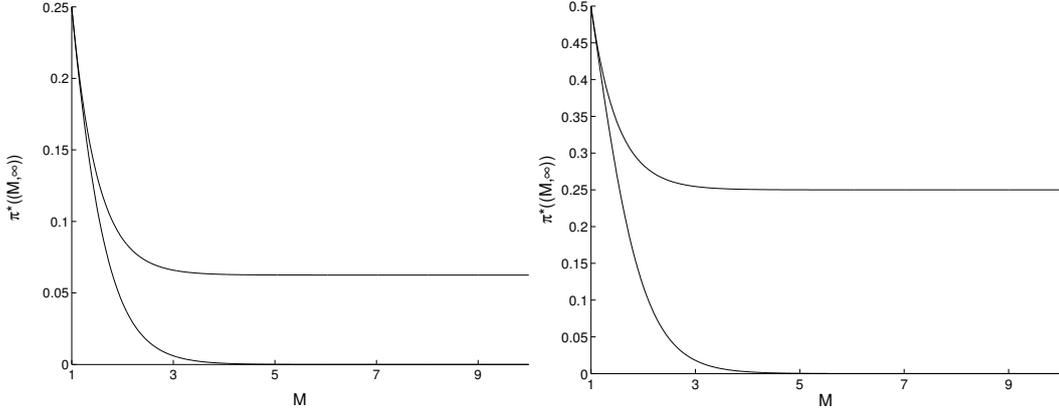


Abbildung 3.3: Abschätzungen für  $\pi^*((M, \infty))$ ;  $\lambda = 2$  und  $q = \frac{3}{4}$  bzw.  $q = \frac{1}{2}$ .

**Beweis:** Folgt sofort mit Satz 3.71,  $\mu \equiv 0$  auf  $(0, 1)$ , und Satz 3.5.  $\square$

Für eine explizitere Darstellung, etwa von  $\pi^*((1, M])$ ,  $M > 1$ , müßten Funktionen der Form  $\exp(-\frac{y}{z} - z)$  nach  $z$  integriert werden - dies stellt leider ein Problem dar. Immerhin ergibt obige Darstellung bessere Abschätzungen nach unten für  $\pi^*((1, M])$ ,  $M > 1$ , als Satz 3.89. Dazu überlegt man sich, daß die untere Abschätzung aus Satz 3.89 gerade dem Term für  $i = 1$  aus obiger Darstellung entspricht. Die Abschätzung läßt sich also verbessern, wenn weitere Terme für  $i > 1$  hinzugezogen werden. Der folgende Satz tut dies exemplarisch für  $i = 2$  und 3.

**Satz 3.93** Sei  $M \in [1, \infty)$ . Für das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  für  $\Phi$  gilt dann

1.  $\pi^*((1, M]) \geq q(1 - q)(1 - \exp(\lambda - \lambda M)) + q(1 - q)^2(1 - \exp(\lambda - \lambda\sqrt{M}))^2 + q(1 - q)^3(1 - \exp(\lambda - \lambda\sqrt[4]{M}))^2(1 - \exp(\lambda - \lambda\sqrt{M}))$ ,
2.  $\pi^*((M, \infty)) \leq (1 - q) - q(1 - q)(1 - \exp(\lambda - \lambda M)) - q(1 - q)^2(1 - \exp(\lambda - \lambda\sqrt{M}))^2 - q(1 - q)^3(1 - \exp(\lambda - \lambda\sqrt[4]{M}))^2(1 - \exp(\lambda - \lambda\sqrt{M}))$ .

**Beweis:** 1. Nach Satz 3.92 gilt

$$\begin{aligned} & \pi^*((1, M]) \\ &= q \sum_{i=1}^{\infty} (1 - q)^i \lambda^i \int_1^{\infty} \dots \int_1^{\infty} \int_{\frac{(1, M]}{z_1 \dots z_{i-1}} \cap [1, \infty)} \exp(\lambda - \lambda z_i) \dots \exp(\lambda - \lambda z_1) dz_i \dots dz_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^i \lambda^i \int_1^M \dots \int_1^{\frac{M}{z_1 \dots z_{i-2}}} \int_1^{\frac{M}{z_1 \dots z_{i-1}}} \exp(\lambda - \lambda z_i) \dots \exp(\lambda - \lambda z_1) dz_i \dots dz_1 \\
&\geq q \sum_{i=1}^3 (1-q)^i \lambda^{i-1} \int_1^M \dots \int_1^{\frac{M}{z_1 \dots z_{i-2}}} \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{z_1 \dots z_{i-2} z_{i-1}}\right)\right) \\
&\quad \cdot \exp(\lambda - \lambda z_{i-1}) \dots \exp(\lambda - \lambda z_1) dz_{i-1} \dots dz_1 \\
&=: I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Mit

$$I_1 = q(1-q)(1 - \exp(\lambda - \lambda M)),$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= q(1-q)^2 \lambda \int_1^M \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{z}\right)\right) \exp(\lambda - \lambda z) dz \\
&\geq q(1-q)^2 \lambda \int_1^{\sqrt{M}} \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{z}\right)\right) \exp(\lambda - \lambda z) dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq q(1-q)^2 \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{\sqrt{M}}\right)\right) \lambda \int_1^{\sqrt{M}} \exp(\lambda - \lambda z) dz \\
&= q(1-q)^2 \left(1 - \exp(\lambda - \lambda \sqrt{M})\right)^2,
\end{aligned}$$

$$I_3 = q(1-q)^3 \lambda^2 \int_1^M \int_1^{\frac{M}{y}} \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{yz}\right)\right) \exp(\lambda - \lambda z) \exp(\lambda - \lambda y) dz dy$$

$$\geq q(1-q)^3 \lambda^2 \int_1^M \int_1^{\sqrt{\frac{M}{y}}} \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \frac{M}{yz}\right)\right) \exp(\lambda - \lambda z) \exp(\lambda - \lambda y) dz dy$$

$$\geq q(1-q)^3 \lambda^2 \int_1^M \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \sqrt{\frac{M}{y}}\right)\right) \int_1^{\sqrt{\frac{M}{y}}} \exp(\lambda - \lambda z) \exp(\lambda - \lambda y) dz dy$$

$$= q(1-q)^3 \lambda \int_1^M \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \sqrt{\frac{M}{y}}\right)\right)^2 \exp(\lambda - \lambda y) dy$$

$$\geq q(1-q)^3 \lambda \int_1^{\sqrt{M}} \left(1 - \exp\left(\lambda - \lambda \sqrt{\frac{M}{\sqrt{M}}}\right)\right)^2 \exp(\lambda - \lambda y) dy$$

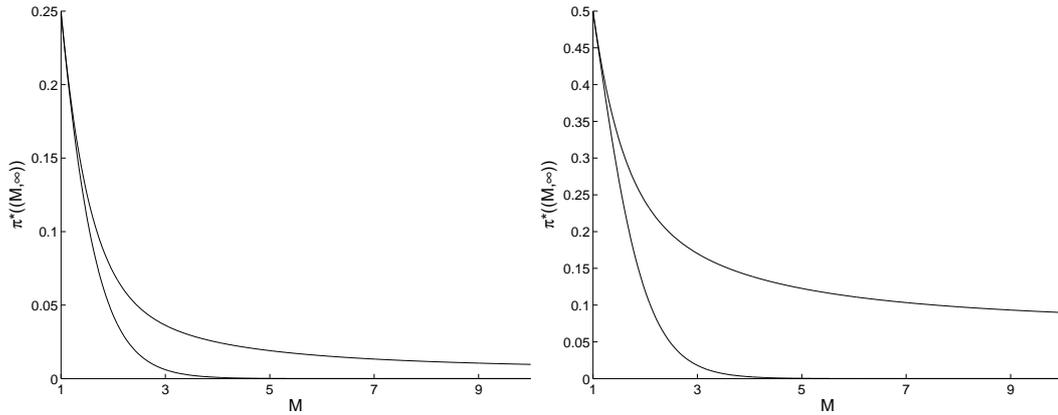


Abbildung 3.4: Verbesserte Abschätzungen für  $\pi^*((M, \infty))$ ;  $\lambda = 2$  und  $q = \frac{3}{4}$  bzw.  $q = \frac{1}{2}$ .

$$= q(1 - q)^3(1 - \exp(\lambda - \lambda\sqrt[4]{M}))^2(1 - \exp(\lambda - \lambda\sqrt{M}))$$

folgt die Behauptung.

2. Folgt sofort aus 1. mit  $\pi^*((1, \infty)) = 1 - q$ . □

**Beispiel 3.94** Seien  $q$  und  $\lambda$  wie in Beispiel 3.91. Abbildung 3.4 zeigt die Verbesserung der oberen Abschätzung von  $\pi^*((M, \infty))$  durch Satz 3.93. Die untere Abschätzung wurde aus Satz 3.89 übernommen.

Auch wenn es in diesem Fall sehr schwierig ist, eine exakte Dichte für  $\pi^*$  zu bestimmen und nur Abschätzungen möglich sind, so läßt sich doch zeigen, daß es keine Powerlaw-Dichte für  $\pi^*$  oberhalb des Resetlevels  $\{1\}$  gibt.

**Satz 3.95** Seien  $q \in (0, 1)$  und  $\lambda > 0$ . Dann gibt es keine Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so daß  $\pi^*(A) = \int_A \beta x^{-\alpha} dx$  für alle  $A \in \mathcal{B}(X)$  mit  $A \subseteq (1, \infty)$ .

**Beweis:** Seien  $q \in (0, 1)$  und  $\lambda > 0$ . Angenommen, es gäbe solche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Soll  $\beta x^{-\alpha}$  eine Dichte für  $\pi^*$  außerhalb von  $\{1\}$  sein, so muß  $\beta > 0$  gelten und  $1 \stackrel{!}{=} \pi^*(X) = \pi^*(\{1\}) + \int_1^\infty \beta x^{-\alpha} dx \stackrel{3.88}{\Leftrightarrow} 1 - q = \int_1^\infty \beta x^{-\alpha} dx$ .

Hieraus folgt  $\alpha > 1$  und

$$1 - q = \beta \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha}]_1^\infty \Leftrightarrow \beta = (\alpha - 1)(1 - q).$$

Sind nun  $1 \leq c < d$  zwei beliebige Zahlen, so muß nach Voraussetzung einerseits

$$\pi^*((c, d]) = \int_c^d \beta x^{-\alpha} dx = \beta \left[ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_c^d = (1 - q)(c^{1-\alpha} - d^{1-\alpha})$$

gelten und andererseits, da  $\pi^*$  invariant ist,

$$\begin{aligned}
\pi^*((c, d]) &= \int_X P(x, (c, d]) d\pi^*(x) \\
&= qP(1, (c, d]) + \int_1^\infty \beta x^{-\alpha} P(x, (c, d]) dx \\
&\stackrel{3.875.}{=} q(1 - q)(\exp(\lambda - \lambda c) - \exp(\lambda - \lambda d)) \\
&\quad + \int_1^c (\alpha - 1)(1 - q)^2 x^{-\alpha} (\exp(\lambda - \lambda \frac{c}{x}) - \exp(\lambda - \lambda \frac{d}{x})) dx \\
&\quad + \int_c^d (\alpha - 1)(1 - q)^2 x^{-\alpha} (1 - \exp(\lambda - \lambda \frac{d}{x})) dx \\
&= q(1 - q)(\exp(\lambda - \lambda c) - \exp(\lambda - \lambda d)) \\
&\quad + \int_1^c (\alpha - 1)(1 - q)^2 x^{-\alpha} \exp(\lambda - \lambda \frac{c}{x}) dx \\
&\quad - \int_1^d (\alpha - 1)(1 - q)^2 x^{-\alpha} \exp(\lambda - \lambda \frac{d}{x}) dx \\
&\quad + (1 - q)^2 (c^{1-\alpha} - d^{1-\alpha}).
\end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
& q(1 - q)(\exp(\lambda - \lambda c) - c^{1-\alpha}) + (\alpha - 1)(1 - q)^2 \int_1^c x^{-\alpha} \exp(\lambda - \lambda \frac{c}{x}) dx \\
&= q(1 - q)(\exp(\lambda - \lambda d) - d^{1-\alpha}) + (\alpha - 1)(1 - q)^2 \int_1^d x^{-\alpha} \exp(\lambda - \lambda \frac{d}{x}) dx.
\end{aligned}$$

Also ist die Funktion

$$\begin{aligned}
g(c) &= q(\exp(\lambda - \lambda c) - c^{1-\alpha}) + (\alpha - 1)(1 - q) \int_1^c x^{-\alpha} \exp(\lambda - \lambda \frac{c}{x}) dx \\
&\stackrel{t=\frac{\lambda c}{x}}{=} q(\exp(\lambda - \lambda c) - c^{1-\alpha}) \\
&\quad + (\alpha - 1)(1 - q) \exp(\lambda) (\lambda c)^{1-\alpha} \int_\lambda^{\lambda c} t^{\alpha-2} \exp(-t) dt
\end{aligned}$$

konstant auf  $[1, \infty)$  und somit  $h(c) := \frac{d}{dc}g(c) \equiv 0$  auf  $(1, \infty)$ .

$$h(c) = -\lambda q \exp(\lambda - \lambda c) - q(1 - \alpha)c^{-\alpha} + (\alpha - 1)(1 - q)\frac{1}{c} \exp(\lambda - \lambda c) \\ - (\alpha - 1)^2(1 - q)\lambda \exp(\lambda)(\lambda c)^{-\alpha} [\Gamma(\alpha - 1, \lambda) - \Gamma(\alpha - 1, c\lambda)],$$

wobei die unvollständige Gammafunktion definiert ist als

$$\Gamma(a, z) := \int_z^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt.$$

$\Rightarrow 0 = \lim_{c \downarrow 1} h(c) = \alpha - 1 - q\lambda$ . Somit ergibt sich  $\alpha = 1 + q\lambda$ . Damit folgt

$$h(c) = -\lambda q \exp(\lambda - \lambda c) + q^2 \lambda c^{-1-q\lambda} + \lambda q(1 - q)\frac{1}{c} \exp(\lambda - \lambda c) \\ - (\lambda q)^2(1 - q)\lambda \exp(\lambda)(\lambda c)^{-1-\lambda q} [\Gamma(q\lambda, \lambda) - \Gamma(q\lambda, c\lambda)].$$

$h(c) \equiv 0$  auf  $(1, \infty)$  liefert für alle  $c > 1$

$$\Gamma(q\lambda, \lambda) - \Gamma(q\lambda, c\lambda) = \frac{\lambda^{q\lambda}}{q(1 - q)\lambda \exp(\lambda + c\lambda)} [q \exp(c\lambda) \\ + (1 - q)c^{q\lambda} \exp(\lambda) - c^{1+q\lambda} \exp(\lambda)]. \quad (3.13)$$

Andererseits ergibt  $\alpha = 1 + q\lambda$

$$g(c) = q(\exp(\lambda - \lambda c) - c^{-q\lambda}) + q\lambda(1 - q) \exp(\lambda)(\lambda c)^{-q\lambda} [\Gamma(q\lambda, \lambda) - \Gamma(q\lambda, c\lambda)]$$

und aus der Konstanz von  $g(c)$  auf  $[1, \infty)$  folgt für alle  $c \geq 1$

$$g(c) = g(1) \\ \Leftrightarrow q(\exp(\lambda - \lambda c) - c^{-q\lambda}) \\ + (q\lambda)(1 - q) \exp(\lambda)(\lambda c)^{-q\lambda} [\Gamma(q\lambda, \lambda) - \Gamma(q\lambda, c\lambda)] = 0 \\ \Leftrightarrow \Gamma(q\lambda, \lambda) - \Gamma(q\lambda, c\lambda) = \frac{c^{-q\lambda} - \exp(\lambda - \lambda c)}{\exp(\lambda)\lambda(1 - q)(c\lambda)^{-q\lambda}}. \quad (3.14)$$

Gleichsetzen von (3.13) und (3.14) ergibt

$$c^{-q\lambda} [q \exp(c\lambda) + (1 - q)c^{q\lambda} \exp(\lambda) - c^{1+q\lambda} \exp(\lambda)] \\ = q \exp(c\lambda) [c^{-q\lambda} - \exp(\lambda - c\lambda)] \quad \forall c > 1 \\ \Leftrightarrow \exp(\lambda) = c \exp(\lambda) \quad \forall c > 1.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, da  $\exp(\lambda) > 0$ .

Insgesamt folgt: Es gibt keine Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so daß  $\pi^*(A) = \int_A \beta x^{-\alpha} dx$  für alle  $A \in \mathcal{B}(X)$  mit  $A \subseteq (1, \infty)$ . □

# 4 Simulation des untersuchten Modells

In diesem Kapitel soll das asymptotische Verhalten der untersuchten Markovketten zusätzlich numerisch untersucht werden. Herausgegriffen wurden die Fälle 2.2, 2.3.3, 2.4.1, 3.6 und 3.7.

Die Simulationen wurden in Matlab durchgeführt. Der genaue Quellcode für den Fall 3.6 befindet sich in Anhang B, die anderen Fälle wurden analog umgesetzt.

Der Anfangswert  $x(1)$  wurde jeweils auf den Resetlevel gesetzt, der als 1 gewählt wurde. (Im Fall 2.4.1 wurde der kleinste Resetlevel, 2, gewählt.) Jeder weitere Wert  $x(i+1)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , wurde so generiert, daß  $x(i+1) = n_0$  mit Wahrscheinlichkeit  $q$  und  $x(i+1) = \mu x(i)$  mit Wahrscheinlichkeit  $1 - q$ .  $n_0$  war im Fall 2.4.1 gleichverteilt auf  $m_1 = 1, m_2 = 3$  und  $m_3 = 5$ , in allen anderen Fällen konstant gleich 1.  $\mu$  war in den Fällen 2.2 und 2.4.1 konstant gleich 2, in den anderen Fällen wurde  $\mu$  nach der zugrunde liegenden Verteilung generiert. Dabei wurde für die Fälle 3.6 und 3.7 benutzt, daß für eine Zufallsvariable  $X$  mit stetiger Verteilungsfunktion  $F$   $F(X)$  gleichverteilt ist in  $[0, 1]$  (siehe z.B. Seite 150, Krenkel, [8]). Damit läßt sich aus der *rand*-Funktion von Matlab, die eine (gleichverteilte) Zufallszahl zwischen 0 und 1 erzeugt, über  $F^{-1}(\text{rand})$  ein geeignetes  $\mu$  erzeugen.

Aus den mit der Simulation erzeugten Werten  $x(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , wurden anschließend u.a. empirische Dichten berechnet, die Aufschlüsse über die Dichte  $f$  der invarianten Verteilung  $\rho$  bzw.  $\pi^*$  geben können.

## 4.1 Fall 2.2

Für den Fall eines konstanten Resetlevels und eines konstanten Faktors  $\mu$  wurden  $\mu = 2$  sowie  $q = \frac{1}{2}$  gewählt und  $10^7$  Iterationsschritte berechnet. Dies ergibt nach Satz 2.22  $\alpha = -\log_\mu(1 - q) = 1$  und somit für  $\rho$  das Powerlaw  $\rho(2^i) = \frac{1}{2}(2^i)^{-1}$ .

Abbildung 4.1 zeigt die empirische Zähldichte für  $\rho$  auf  $S = \{1, \mu, \mu^2, \dots\}$ , sowie rechts den log-log-transformierten Graphen, zusammen mit der rechnerischen Lösung. Diese wurde, der besseren Sichtbarkeit halber, stetig eingezeichnet. Besonders in der log-log-Transformation sieht man sehr deutlich die gute Übereinstimmung zwischen numerischer und rechnerischer Lösung. Die

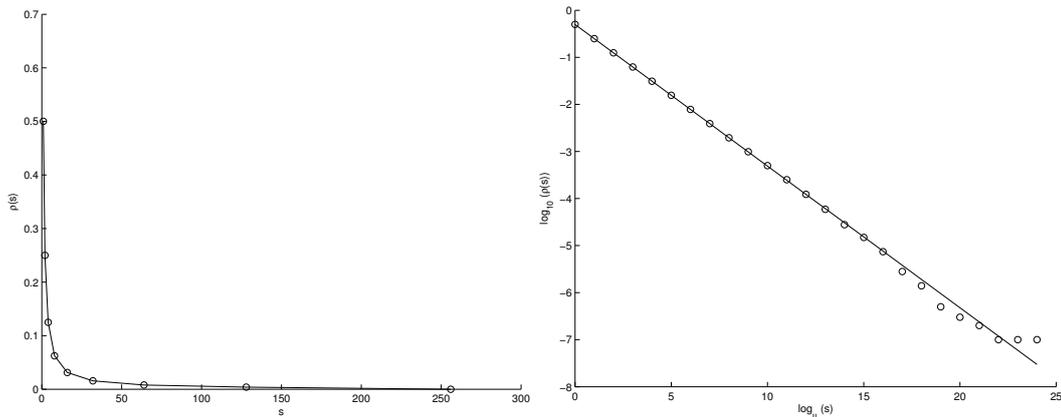


Abbildung 4.1:  $\rho(s)$  für  $s \in S$  sowie log-log-Transformation.  $\mu = 2$  und  $q = \frac{1}{2}$ . Kreise entsprechen der numerischen, durchgezogene Linien der rechnerischen Lösung.

leichten Abweichungen rechts außen können von einfacher zufälliger Variation herrühren, da sie sich in der Größenordnung von einem Datenpunkt bewegen.

## 4.2 Fall 2.3.3

Für den Fall einer Verteilung von  $\mu$  auf zwei Werten wurde eine Gleichverteilung auf  $\mu_1 = 2$  und  $\mu_2 = 7$  gewählt und  $q = \frac{1}{2}$  gesetzt. Es wurden  $10^7$  Iterationsschritte berechnet und daraus eine empirische Zähldichte für die asymptotische Verteilung  $\rho$  bestimmt. Diese ist als log-log-Plot in Abbildung 4.2 dargestellt. Wie in Abschnitt 2.3.4 bereits bewiesen, wird sehr deutlich, daß  $\rho$  keinem Powerlaw entspricht und sich einem solchen auch nicht für große  $i$  und  $j$  annähert.

## 4.3 Fall 2.4.1

Für den Fall einer Verteilung des Resetlevels auf  $N$  Werten wurde analog zu Beispiel 2.33 eine Gleichverteilung auf  $m_1 = 1, m_2 = 3$  und  $m_3 = 5$  gewählt und  $q = \frac{1}{2}, \mu = 2$  gesetzt. Es wurden  $10^7$  Iterationsschritte berechnet und daraus eine empirische Zähldichte für die asymptotische Verteilung  $\rho$  bestimmt. Diese ist als log-log-Plot in Abbildung 4.3 dargestellt. Wie bereits in Beispiel 2.33 diskutiert, ist  $\rho$  kein einheitliches Powerlaw auf  $S$ , sondern zerfällt in  $N = 3$  Powerlaws auf den Untermengen  $\{m_1\mu^i, i \in \mathbb{N}_0\}, \{m_2\mu^i, i \in \mathbb{N}_0\}$  und  $\{m_3\mu^i, i \in \mathbb{N}_0\}$  von  $S$ .

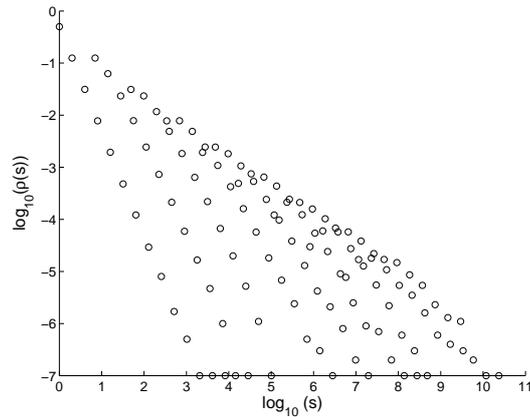


Abbildung 4.2: log-log-Plot von  $\rho(s)$  für  $s \in S$ .  $\mu$  ist gleichverteilt auf  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 7$  und  $q = \frac{1}{2}$ .

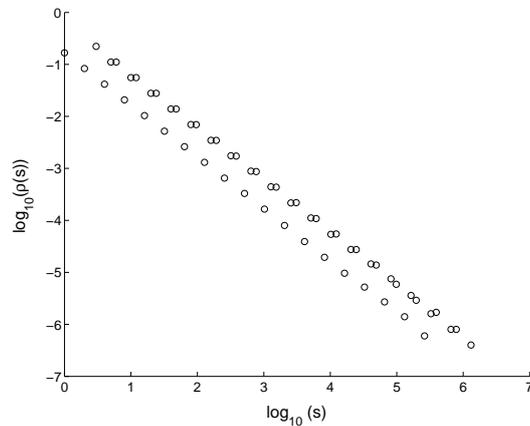


Abbildung 4.3: log-log-Plot von  $\rho(s)$  für  $s \in S$ .  $\mu = 2$  und  $q = \frac{1}{2}$ , der Resetlevel ist gleichverteilt auf  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 3$  und  $m_3 = 5$ .

## 4.4 Fall 3.6

Für den Fall der (stetigen) Gleichverteilung für  $\mu$  wurden zwei verschiedene Parameterkonstellationen betrachtet. Zunächst wurden  $q = \frac{1}{2}$ ,  $a = 4$  und  $b = 5$  gesetzt, um die Ergebnisse in den disjunkten Intervallen mit Abbildung 3.2 vergleichen zu können. Anschließend wurde der Fall  $q = 0.1$ ,  $a = 2$  und  $b = 3$  betrachtet. Hier gibt es nur ein einziges disjunktes Intervall, dafür kann sehr schön die Überlappung der Intervalle untersucht werden. Der geringere  $q$ -Wert verhindert ein zu schnelles Abklingen der Verteilung, das die Approximation aufgrund weniger Datenpunkte ungenau und die graphische Auflösung schlecht machen würde. Es wurden jeweils  $10^8$  Iterationsschritte berechnet. Zunächst wurden in beiden Fällen die empirischen Werte für  $\pi^*([a^n, b^n])$  sowie die rechnerischen Grenzen aus den Sätzen 3.77 und 3.79 berechnet. Abbil-

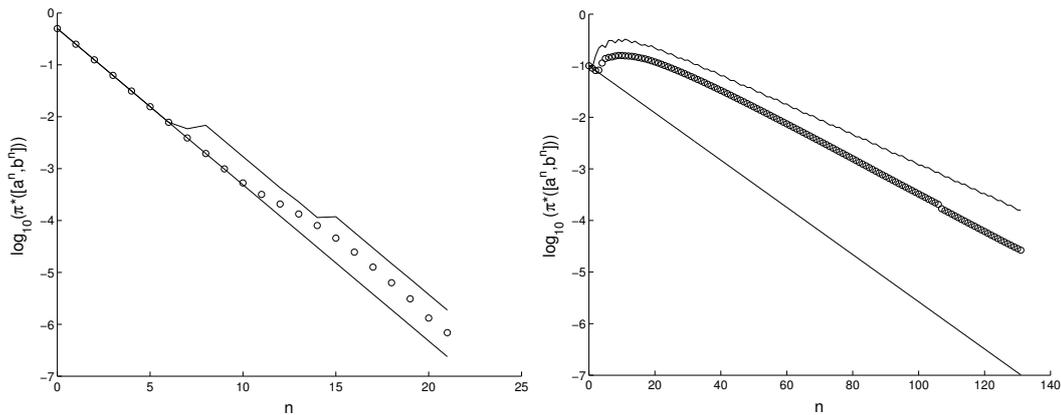


Abbildung 4.4:  $\log_{10}(\pi^*([a^n, b^n]))$  für die Gleichverteilung.  $q = \frac{1}{2}$ ,  $a = 4$  und  $b = 5$  bzw.  $q = 0.1$ ,  $a = 2$  und  $b = 3$ . Kreise entsprechen der numerischen Lösung, durchgezogene Linien den rechnerischen Abschätzungen.

Abbildung 4.4 zeigt je eine Darstellung von  $\log_{10}(\pi^*([a^n, b^n]))$ . Deutlich wird die gute Übereinstimmung zwischen numerischer und rechnerischer Lösung für die disjunkten Intervalle. Für die nicht-disjunkten Intervalle bewegt sich die numerische Lösung relativ mittig (berücksichtigt man in der Abbildung die logarithmische Transformation) zwischen den beiden Grenzen. Allerdings lassen diese für den zweiten Fall recht viel Spiel, da hier starke Überlappung vorliegt. Als nächstes wurde aus den Daten für die disjunkten Intervalle  $[a^n, b^n]$  eine empirische Dichte berechnet. Abbildung 4.5 zeigt diese als Histogramme für die disjunkten Intervalle ( $n = 1, \dots, 6$ ) für den Fall  $q = \frac{1}{2}$ ,  $a = 4$  und  $b = 5$ . Im Vergleich mit Abbildung 3.2 zeigt sich die gute Übereinstimmung. Das Intervall  $n = 6$  setzt die Folge der glockenförmigen Dichten in den disjunkten Intervallen fort. Dabei wird der Hauptteil dieser Glocke mit steigendem  $n$  immer schmaler im Verhältnis zur Intervallbreite. Die Vermutung ist naheliegend, daß sich dieser Trend bei einer größeren Anzahl disjunkter Intervalle fortsetzen würde.

Für den interessanten, da analytisch schlecht zu behandelnden Fall der nicht-disjunkten Intervalle wurde das zweite Beispiel  $q = 0.1$ ,  $a = 2$  und  $b = 3$  betrachtet und ein Histogramm aus den Daten für einige nicht-disjunkte Intervalle ( $a^2$  bis  $b^7$ ) berechnet. Abbildung 4.6 zeigt links das gesamte Histogramm. Im zweiten Bild wurde ein Teil herausvergrößert (im linken Bereich ist dadurch das Histogramm oben abgeschnitten). Man sieht hier gut, wie sich die glockenförmigen Dichten auf  $[a^n, b^n]$  überlagern. Da die geometrischen Mittelpunkte der Intervalle  $a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$ , bei denen die Maxima liegen, streng monoton wachsen, sind die „Glocken“ gut zu erkennen und es überlagern sich nur die „Ausläufer“ an den Rändern.

Zuletzt wurde die empirische Dichte für  $x \geq 2$  berechnet und als log-log-Plot in Abbildung 4.7 dargestellt. Man sieht, daß die Höhe der „Glocken“ in den

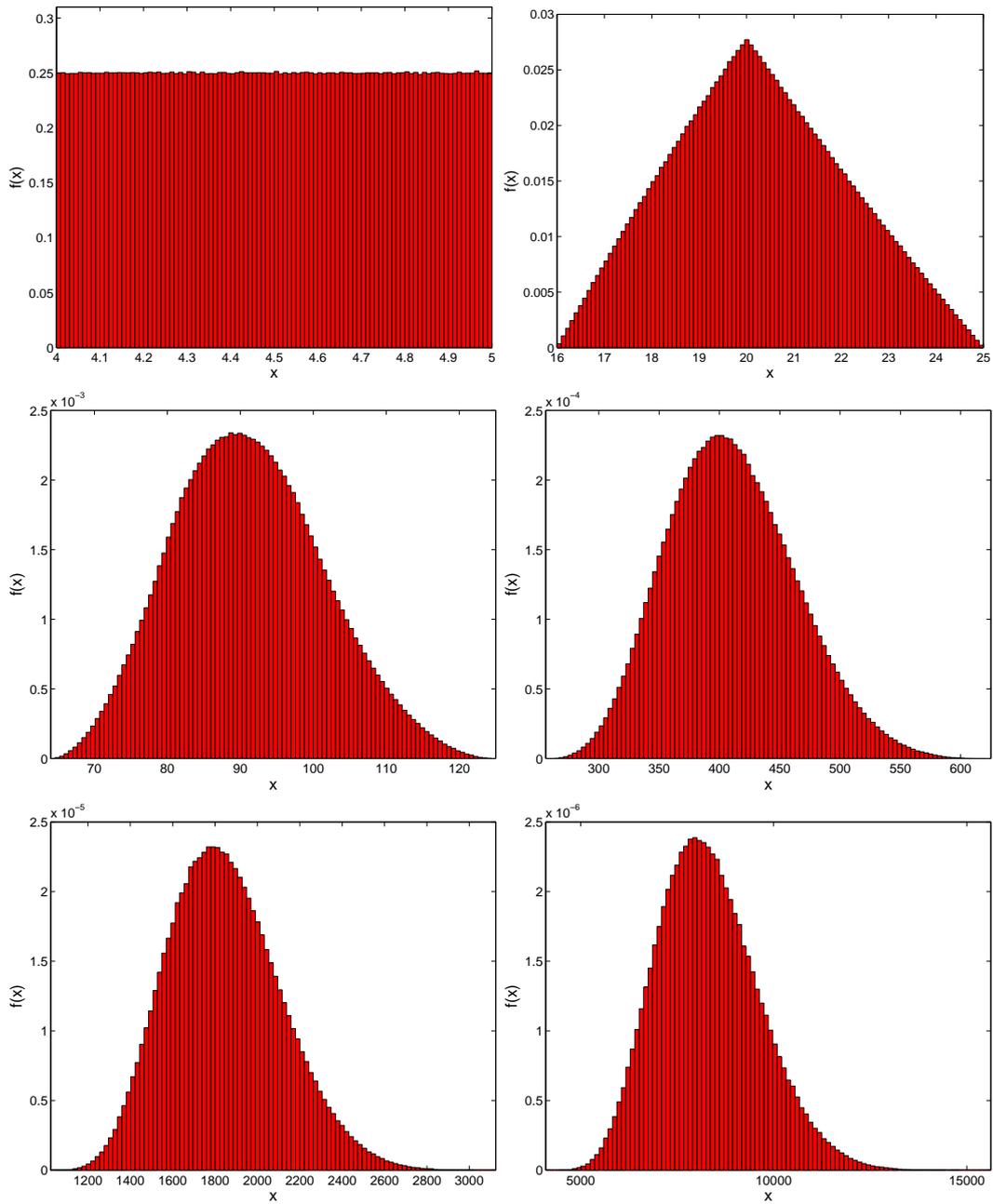


Abbildung 4.5: Histogramm aus den Daten für die Gleichverteilung in den Intervallen  $[a^n, b^n]$ ,  $n = 1, \dots, 6$ .  $q = \frac{1}{2}$ ,  $a = 4$ ,  $b = 6$ .

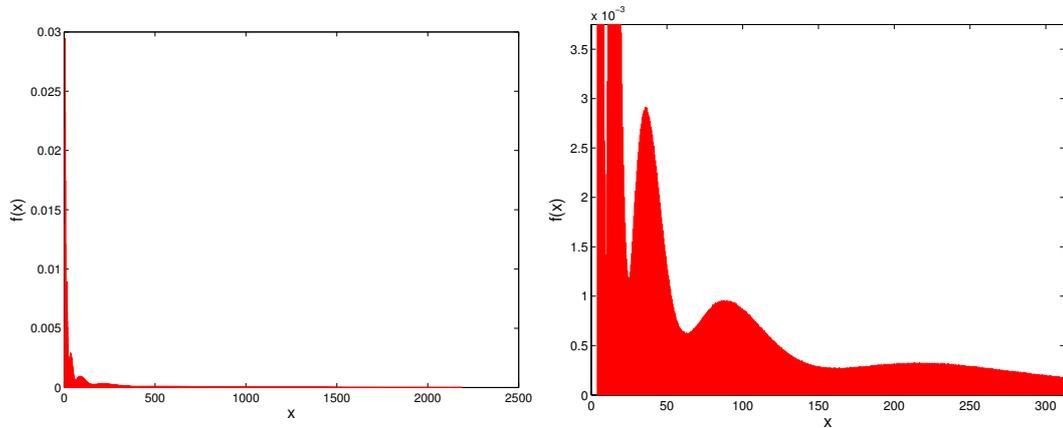


Abbildung 4.6: Histogramm aus den Daten für die Gleichverteilung in  $[a^2, b^7]$ .  $q = 0.1, a = 2$  und  $b = 3$ .

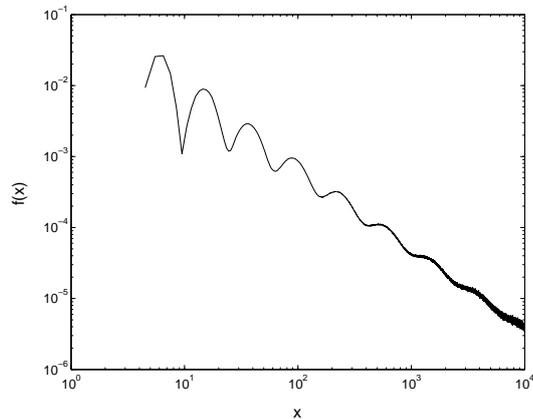


Abbildung 4.7: Log-log-Plot der empirischen Dichte für die Gleichverteilung.  $q = 0.1, a = 2$  und  $b = 3$ .

Intervallen  $[a^n, b^n]$  exponentiell schnell abflacht und insofern tatsächlich eine Annäherung an ein Powerlaw stattfindet.

## 4.5 Fall 3.7

Für den Fall der verschobenen Exponentialverteilung für  $\mu$  wurden  $q = \frac{1}{2}$  und  $\lambda = 2$  angenommen. Es wurden  $10^7$  Iterationen berechnet und aus den resultierenden Daten eine empirische Dichte bestimmt. Da durch den Peak bei der 1 (rechnerisch eine Delta-Funktion) die Auflösung für den restlichen Teil sehr schlecht ist, zeigt Abbildung 4.8 daneben zusätzlich eine empirische Dichte nur für den Teil größer 1. Das dritte Bild zeigt eine  $\log_{10} - \log_{10}$ -Darstellung der empirischen Dichte ohne 1. Hier wird graphisch deutlich, was in Satz 3.95

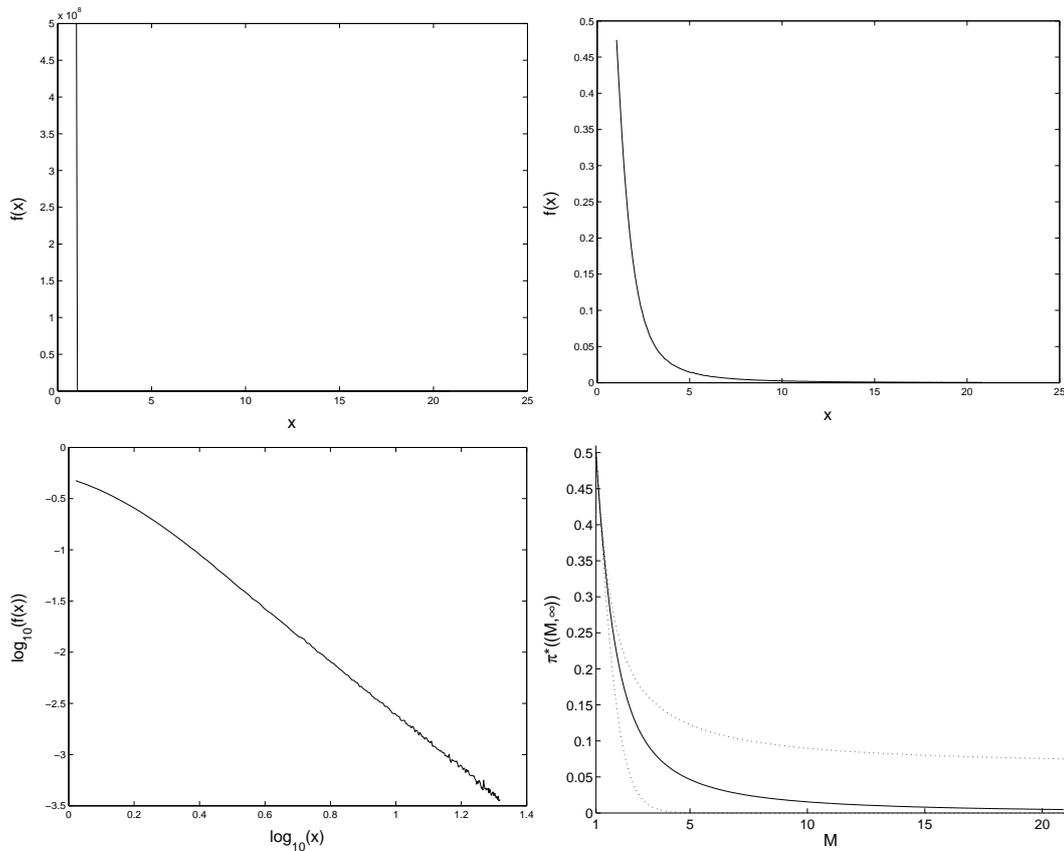


Abbildung 4.8: Empirische Dichte für die Exponentialverteilung: mit und ohne  $\log$ - $\log$ -Transformation. Außerdem  $\pi^*((M, \infty))$  für  $M \geq 1$  (glatt empirisch, gepunktet rechnerische Grenzen).  $q = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 2$ .

bereits gezeigt wurde: Die asymptotische Verteilung  $\pi^*$  ist kein Powerlaw oberhalb der 1, denn sonst müßte die  $\log$ - $\log$ -Darstellung eine exakte Gerade sein. Allerdings zeigt sich, daß sich die Dichte von  $\pi^*$  für große  $x$  tatsächlich einem Powerlaw annähert.

Das vierte Bild zeigt  $\pi^*((M, \infty))$  für  $M \geq 1$  - empirisch bestimmt (glatte Linie), sowie die aus den Sätzen 3.89 und 3.93 bestimmten rechnerischen Grenzen (gepunktete Linien).

## 5 Diskussion

In dieser Arbeit wurden multiplikative Markovketten mit Resetereignissen untersucht. Ausgehend von einem Modell von Manrubia und Zanette, [9], wurden die dort beschriebenen stochastischen Prozesse als Zeit-homogene Markovketten mit diskretem (Kapitel 2) bzw. stetigem (Kapitel 3) Zustandsraum eingeführt. Da die Autoren in ihrem Artikel von einer Konvergenz des Prozesses gegen eine asymptotische stationäre Verteilung ausgehen, wurden zunächst die Voraussetzungen für eine solche Konvergenz untersucht. Es konnte nachgewiesen werden, daß die Verteilung der Kette tatsächlich unter sehr allgemeinen Bedingungen gegen eine asymptotische invariante Verteilung konvergiert.

Im diskreten Fall mußte dafür im wesentlichen die Erreichbarkeit aller Zustände untereinander sichergestellt werden. Die für die Konvergenz wichtige Aperiodizität und positive Rekurrenz folgten dann aus der Reseteigenschaft der Übergangswahrscheinlichkeiten.

Im stetigen Fall stellte sich die spezielle Struktur des Übergangswahrscheinlichkeitskerns als besonders wichtig heraus, die den Resetlevel mit positiver Wahrscheinlichkeit von jedem anderen Zustand erreichbar macht. Dadurch erfüllt der Resetlevel Eigenschaften wie die eines zugänglichen Atoms, die für die (Harris-)Rekurrenz, die Existenz eines invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes und schließlich die Konvergenz gegen diese invariante Verteilung wichtig sind. Die ( $\psi$ -)Irreduzibilität wird dadurch ebenfalls gesichert, die ein Mindestmaß an Erreichbarkeit zwischen verschiedenen Mengen sicherstellt und für fast alle weiteren Folgerungen wichtig ist. Aus der Möglichkeit eines Resets zu jedem Zeitpunkt folgt ebenfalls die Aperiodizität, so daß der Zustandsraum nicht in mehrere disjunkte Mengen zerfällt, die die Markovkette zyklisch besucht.

Im diskreten Fall wurde die schwache (punktweise) Konvergenz der Verteilung gezeigt, im stetigen Fall konnte zusätzlich eine Gleichmäßigkeit der Konvergenz (in der totalen Variationsnorm) nachgewiesen werden.

Nachdem die Konvergenz gesichert war, ging es in einem zweiten Schritt um die Form der asymptotischen Verteilung. Manrubia und Zanette hatten in ihrem Artikel postuliert, daß die asymptotische Verteilung stets die Form eines Powerlaws habe, zumindestens außerhalb eines Gebiets, in dem die Verteilung des Resetlevels „nennenswert“ von Null verschieden ist. Der einfachste Fall eines konstanten Resetlevels und eines konstanten multiplikativen Faktors war von ihnen als einziger ausführlich behandelt worden. Er wurde hier als erstes untersucht und in diesem Fall konnte tatsächlich auch das asymptotische

Powerlaw nachgewiesen werden.

Anschließend wurden Verallgemeinerungen untersucht, indem Resetlevel (nur Kapitel 2) bzw. multiplikativer Faktor (Kapitel 2 und 3) als Zufallsvariablen mit eigener Verteilung angenommen wurden. Hierbei wurde schnell deutlich, daß das Postulat eines Powerlaws starken Einschränkung unterworfen ist.

Im diskreten Fall konnten die asymptotischen Verteilungen explizit berechnet werden. Wurde die Powerlaw-Verteilung über die Verteilung des multiplikativen Faktors schon in das Modell hineingegeben, so ergab dies tatsächlich auch ein Powerlaw für die asymptotische Verteilung außerhalb des Resetlevels - dies war allerdings auch nicht verwunderlich. Ein exaktes Powerlaw auf dem ganzen Definitionsbereich konnte jedoch nur unter sehr restriktiven Voraussetzungen an die Verteilung des multiplikativen Faktors erreicht werden. Hat der multiplikative Faktor eine Verteilung auf einer endlichen Menge (mit mehr als einem Element), so ist die asymptotische Verteilung sogar nie ein Powerlaw, und nähert sich einer solchen Verteilung auch nicht für große Werte an. Für die Verteilung des Resetlevels ergab sich ein ähnliches Bild. Mit einer fast Powerlaw-förmigen Verteilung konnte tatsächlich auch asymptotisch ein Powerlaw erreicht werden. Hatte der Resetlevel hingegen eine beliebige Verteilung auf einer endlichen Menge, so ergaben sich asymptotisch auf Teilmengen des Definitionsbereiches verschiedene Powerlaws und ein allgemeines Powerlaw konnte nur unter sehr restriktiven Voraussetzungen erreicht werden. Als Fazit des Kapitels 2 läßt sich also festhalten, daß sich die These des asymptotischen Powerlaws (und sei es außerhalb der Menge der Resetlevel) im diskreten Fall nicht halten läßt. Hingegen müßten die Verteilungen für Resetlevel bzw. multiplikativen Faktor schon sehr speziell gewählt werden, wollte man eine solche asymptotische Verteilung gezielt herbeiführen.

Im stetigen Fall wurde der Resetlevel konstant gehalten und der multiplikative Faktor als Zufallsvariable betrachtet. Für konkrete Verteilungen konnte die asymptotische Verteilung nicht explizit berechnet werden. Im Fall eines beschränkten Trägers (Gleichverteilung auf  $[a, b]$ ) ergaben sich analytisch schwer zugängliche  $n$ -fache Fallunterscheidungen im Intervall  $[a^n, b^n]$ . Im Fall eines unbeschränkten Trägers (Exponentialverteilung auf  $[1, \infty)$ ) waren die Integralgleichungen nicht explizit lösbar. In beiden Fällen wurde deshalb eine Darstellung der asymptotischen Verteilung  $\pi^*$  über iterative Integrale gewählt. Abschätzungen zum Verlauf von  $\pi^*$  auf Intervallen und Simulationen ergänzten diese Darstellung, so daß sich ein recht gutes Bild der asymptotischen Verteilungen ergab. Es konnte in beiden Fällen nachgewiesen werden, daß außerhalb des Resetlevels 1 kein Powerlaw angenommen wird. Simulationen in Kapitel 4 zeigten jedoch, daß sich die Dichte der asymptotischen Verteilung für große Werte tatsächlich einem Powerlaw anzunähern scheint.

Diese Ergebnisse sind jedoch nur ein scheinbarer Widerspruch. Übersetzt man die Argumente von Manrubia und Zanette in die Sprache homogener Markovketten (und schließt einige argumentatorische Lücken sowie ergänzt stillschwei-

gende Voraussetzungen), so würde dies wohl in etwa so aussehen:  
Wir betrachten nur solche gutartigen Fälle, bei denen  $\mu$  eine Dichte  $g$  hat, sich  $P$  also darstellen läßt als

$$P(x, A) = q\delta_1(A) + (1 - q) \int_{\frac{A}{x}} g(z)dz,$$

und die asymptotische Verteilung  $\pi^*$  ebenfalls über eine Dichte  $f$  dargestellt werden kann als

$$\pi^*(A) = q\delta_1(A) + (1 - q) \int_A f(x)dx.$$

Dann ist die Invarianzgleichung  $\pi^*(A) = \int_X P(x, A)d\pi^*(x) \forall A \in \mathcal{B}(X)$  äquivalent zu

$$\begin{aligned} & q\delta_1(A) + (1 - q) \int_A f(x)dx \\ &= \int_X (q\delta_1(A) + (1 - q) \int_{\frac{A}{x}} g(z)dz) (q\delta_1(x) + (1 - q)f(x)dx) \\ \Leftrightarrow & \int_A f(x)dx = q \int_A g(z)dz + (1 - q) \int_X \int_{\frac{A}{x}} g(z)f(x)dzdx \forall A \in \mathcal{B}(X). \end{aligned}$$

Die Dichte  $f$  wird ebenfalls eindeutig beschrieben, ersetzt man  $\forall A \in \mathcal{B}(X)$  durch  $\forall (0, y], y > 0$ , also

$$\int_{(0,y]} f(x)dx = q \int_{(0,y]} g(z)dz + (1 - q) \int_X \int_{\frac{(0,y]}{x}} g(z)f(x)dzdx \forall y > 0.$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f(y) &= qg(y) + (1 - q) \int_0^\infty g\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x} f(x)dx \\ \Leftrightarrow f(y) &= qg(y) + (1 - q) \int_0^\infty g(z) \frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) dz. \end{aligned}$$

Ist nun  $y$  „groß genug“, so ist  $g(y) \approx 0$  und somit

$$f(y) \approx (1 - q) \int_0^\infty g(z) \frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) dz. \quad (5.1)$$

Dann erfüllt  $f(y) = Ay^{-\alpha}$  die Gleichung, wenn  $\alpha$  so gewählt ist, daß

$$(1 - q) \int_0^{\infty} g(z) z^{\alpha-1} dz = 1.$$

Nun wird auch deutlich, daß eine solche Argumentation insbesondere die Existenz von stetigen Dichten für die untersuchten Verteilungen voraussetzt. Eine analoge Argumentation läßt sich für diskrete Verteilungen nicht führen, wie sich auch an den Resultaten in Kapitel 2 leicht ablesen läßt. Im stetigen Fall ist die Situation etwas komplizierter. Obige Argumentation läßt leider einige Details offen. So wird z.B. nicht ganz deutlich, wann  $y$  „groß genug“ ist, um  $g(y)$  vernachlässigen zu können. Der nächste Schritt der Rechnung - Teilen durch  $Ay^{-\alpha}$  - zeigt, daß dazu  $g(y)$  auf jeden Fall schneller als  $y^{-\alpha}$  fallen muß (dies wäre z.B. für die betrachtete Exponentialverteilung der Fall). Noch wichtiger ist ein zweiter Punkt: Die Autoren argumentieren zwar nur, daß  $f(y)$  für besonders große Werte  $y$  ein Powerlaw erfüllt, für die insbesondere  $g(y) \approx 0$  gilt. In Gleichung (5.1) wird jedoch dieses Powerlaw ebenfalls für  $f$  an der Stelle  $\frac{y}{z}$  eingesetzt, wobei wegen  $z \in (0, \infty)$   $\frac{y}{z}$  auch nahe 1 liegen kann. Zwar wird dies wohl vor dem Hintergrund getan, daß für kleine  $\frac{y}{z}$   $z$  groß und somit  $g(z)$  klein ist. Es wird jedoch ein nicht näher bekannter Einfluß des Bereiches, in dem Resetereignisse durchaus eine Rolle spielen, vernachlässigt. Inwieweit sich dies dann auf das Powerlaw in dem Bereich, in dem Resetereignisse „nicht relevant“ sind, auswirkt, bleibt unklar. Die Bedeutung eines nicht-konstanten Resetlevels läßt sich hiermit auch nicht klären. So ist es zum Beispiel nahelegend zu vermuten, daß z.B. bei einer Gleichverteilung für den Resetlevel in Analogie zum diskreten Fall 2.4.1 ebenfalls kein einheitliches Powerlaw, sondern vielmehr ein eigenes Powerlaw für jeden Resetlevel entstehen würde. Insgesamt läßt sich somit festhalten, daß die These des Powerlaws für die asymptotische invariante Verteilung für den diskreten Fall nicht haltbar ist. Im stetigen Fall scheint sich in vielen Fällen die asymptotische Verteilung tatsächlich für sehr große Werte von  $x$  einem Powerlaw anzunähern. Ob dies jedoch immer gilt (insbesondere für nicht-konstanten Resetlevel) und für wie große Werte von  $x$ , bleibt unklar. Insbesondere eine saubere Konvergenzaussage ist aus obigen Überlegungen nicht möglich.

Unabhängig davon würde selbst eine solche Aussage noch keine Aufschlüsse über einen großen Bereich der asymptotischen Verteilung geben. Immerhin hat das asymptotische Wahrscheinlichkeitsmaß  $\pi^*$  in den Bereichen nahe des Resetlevels die größten Werte, hier findet also ein Großteil des interessanten „Geschehens“ statt. Auch über die Art, wie sich die Verteilung  $\pi^*$  einem möglichen Powerlaw annähert, lassen sich nur durch weitergehende Untersuchungen Aussagen treffen. Dies war zum Beispiel beim Fall 3.6 so, bei dem sich das Powerlaw als exponentieller Abfall der „Glockenhöhe“ zu ergeben scheint.

Eine Untersuchung des betrachteten Modells mit der Methodik homogener Markovketten trägt also viel zum Verständnis des asymptotischen Verhaltens bei und ist auch für eine mathematisch saubere Argumentation hilfreich.

# Anhang A

## Mehrdimensionale vollständige Induktion

In diesem Abschnitt wird die Induktion nach mehreren natürlichen Zahlen gleichzeitig eingeführt, wie sie in Kapitel 2 benötigt wird. Als bekannt wird die (eindimensionale) einfache vollständige Induktion vorausgesetzt, wie sie etwa in Satz 1.13 in Jongen und Schmidt, [5], zu finden ist:

**Satz A.1** (Induktionsprinzip)

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A(n)$  eine Aussage über die natürliche Zahl  $n$ . Weiter gelte:

- (1) Die Aussage  $A(1)$  ist wahr („Induktionsanfang“).
- (2) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn  $A(n)$  wahr ist, dann ist auch  $A(n+1)$  wahr („Induktionsschluß“).

Dann ist  $A(n)$  für jede natürliche Zahl  $n$  wahr.

**Bemerkung A.2** Neben obigem Induktionsprinzip gibt es auch noch ein zweites Induktionsprinzip (z.B. Satz 1.16 in Jongen und Schmidt, [5]), bei dem Bedingung (2) ersetzt ist durch: „Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn die Aussage  $A(k)$  für  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$  wahr sind, dann ist auch  $A(n+1)$  wahr.“ Dieses Prinzip wird in dieser Arbeit ebenfalls mehrfach benutzt, wird jedoch in der mehrdimensionalen Verallgemeinerung hier nicht benötigt.

Das Induktionsprinzip läßt sich nun auf die Induktion nach zwei natürlichen Zahlen gleichzeitig verallgemeinern. Wichtig ist dabei die Idee, daß sich eine Aussage  $A(m, n)$ , die von  $m, n \in \mathbb{N}$  abhängt, bei festem  $m$  als Aussage nur in  $n$  betrachten läßt - und umgekehrt.

**Satz A.3** (2-dimensionales Induktionsprinzip) Für  $m, n \in \mathbb{N}$  sei  $A(m, n)$  eine Aussage über das Paar natürlicher Zahlen  $(m, n)$ . Weiter gelte:

- (1) Die Aussage  $A(1, n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
Die Aussage  $A(m, 1)$  ist wahr für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

(2) Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn  $A(m, n + 1)$  und  $A(m + 1, n)$  wahr sind, dann ist auch  $A(m + 1, n + 1)$  wahr.

Dann ist  $A(m, n)$  für jedes Paar von natürlichen Zahlen  $(m, n)$  wahr.

**Beweis:** (a) Sei  $m \in \mathbb{N}$  fest und die Aussage  $A(m, n)$  sei wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$  ( $\star$ ). Dann gilt

1.  $A(m + 1, 1)$  ist wahr nach (1).

2. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Ist  $A(m + 1, n)$  wahr, so ist wegen  $A(m, n + 1)$  wahr (nach  $\star$ ) und (2) auch  $A(m + 1, n + 1)$  wahr.

Mit vollständiger Induktion nach  $n$  folgt:  $A(m + 1, n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Sei  $B(m)$  die Aussage über die natürliche Zahl  $m$ :  $A(m, n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

1.  $B(1)$  ist wahr nach (1).

2. Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt: Ist  $B(m)$  wahr, so ist nach (a) auch  $B(m + 1)$  wahr.

Mit vollständiger Induktion nach  $m$  folgt:  $B(m)$  ist wahr für alle  $m \in \mathbb{N}$ , also ist  $A(m, n)$  wahr für alle  $m \in \mathbb{N}$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Die Anwendung von Satz A.3 läßt sich noch vereinfachen:

**Folgerung A.4** Für  $m, n \in \mathbb{N}$  sei  $A(m, n)$  eine Aussage über die natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$ . Weiter gelte:

(i) Die Aussage  $A(1, 1)$  ist wahr.

(ii) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn  $A(1, n)$  wahr ist, dann ist auch  $A(1, n + 1)$  wahr.

Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn  $A(m, 1)$  wahr ist, dann ist auch  $A(m + 1, 1)$  wahr.

(iii) Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn  $A(m, n + 1)$  und  $A(m + 1, n)$  wahr sind, dann ist auch  $A(m + 1, n + 1)$  wahr.

Dann ist  $A(m, n)$  für jedes Paar von natürlichen Zahlen  $(m, n)$  wahr.

**Beweis:** (1) folgt mit vollständiger Induktion (Satz A.1) nach  $n$  bzw.  $m$  aus (i) und (ii), (iii) ist (2). Die Behauptung folgt mit Satz A.3  $\square$

Nachdem nun das Prinzip der ineinanderverschachtelten Induktionen klarer geworden ist, folgt das N-dimensionale Induktionsprinzip.

**Satz A.5** (N-dimensionales Induktionsprinzip, erste Form)

Sei  $N \in \mathbb{N}$  fest. Für  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  sei  $A(n_1, \dots, n_N)$  eine Aussage über das  $N$ -Tupel natürlicher Zahlen  $(n_1, \dots, n_N)$ . Weiter gelte:

(1) Für jedes feste  $m$  mit  $1 \leq m \leq N$  ist die Aussage

$A(n_1, \dots, n_{m-1}, 1, n_{m+1}, \dots, n_N)$  wahr für alle

$n_1, \dots, n_{m-1}, n_{m+1}, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ .

(2) Für alle  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn für jedes feste  $m$  mit  $1 \leq m \leq N$

$A(n_1 + 1, \dots, n_{m-1} + 1, n_m, n_{m+1} + 1, \dots, n_N + 1)$  wahr ist, dann ist auch

$A(n_1 + 1, \dots, n_n + 1)$  wahr.

Dann ist  $A(n_1, \dots, n_N)$  für jedes  $N$ -Tupel natürlicher Zahlen  $(n_1, \dots, n_N)$  wahr.

**Beweis:** Beweise, daß das  $N$ -dimensionale Induktionsprinzip für jedes  $N \in \mathbb{N}$  gilt, durch vollständige Induktion nach  $N$ .

IA: Für  $N = 1$  ist dies die einfache vollständige Induktion, gültig nach Satz A.1.

IV: Sei  $N \in \mathbb{N}$  und das Induktionsprinzip gelte für  $N$ .

IS: Beh.: Das Induktionsprinzip gilt auch für  $N + 1$ . Seien dazu (1) und (2) der Voraussetzungen für das  $(N + 1)$ -dimensionale Induktionsprinzip erfüllt. Dann gilt:

(a) Sei zunächst  $M := n_{N+1} \in \mathbb{N}$  beliebig fest und sei die Aussage

$A(n_1, \dots, n_N, M)$  wahr für alle  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ . ( $\star$ ) Dann gilt:

1. Für jedes feste  $m$  mit  $1 \leq m \leq N$  ist die Aussage

$A(n_1, \dots, n_{m-1}, 1, n_{m+1}, \dots, n_N, M + 1)$  wahr für alle

$n_1, \dots, n_{m-1}, n_{m+1}, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  nach (1) aus der Voraussetzung des  $(N + 1)$ -dimensionalen Induktionsprinzips.

2. Für alle  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  gilt: Ist für jedes feste  $m$  mit  $1 \leq m \leq N$

$A(n_1 + 1, \dots, n_{m-1} + 1, n_m, n_{m+1} + 1, \dots, n_N + 1, M + 1)$  wahr, so ist, da  $A(n_1 + 1, \dots, n_N + 1, M)$  nach ( $\star$ ) wahr ist, wegen (2) aus der Voraussetzung für das  $N + 1$ -Induktionsprinzip auch  $A(n_1 + 1, \dots, n_N + 1, M + 1)$  wahr.

Mit dem  $N$ -dimensionalen Induktionsprinzip für  $(n_1, \dots, n_N)$  folgt:

$A(n_1, \dots, n_N, M + 1)$  ist wahr für alle  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ .

(b) Sei  $B(M)$  für die natürliche Zahl  $M$  die Aussage:  $A(n_1, \dots, n_N, M)$  ist wahr für alle  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

1.  $B(1)$  ist wahr nach (1) aus der Voraussetzung für  $N + 1$ .

2. Für alle  $M \in \mathbb{N}$  gilt: Ist  $B(M)$  wahr, so ist nach (a) auch  $B(M + 1)$  wahr.

Mit vollständiger Induktion nach  $M$  folgt:  $B(M)$  ist wahr für alle  $M \in \mathbb{N}$ , also ist  $A(n_1, \dots, n_N, M)$  wahr für alle  $n_1, \dots, n_N, M \in \mathbb{N}$ , d.h.  $A(n_1, \dots, n_N, n_{N+1})$  ist wahr für alle  $n_1, \dots, n_{N+1} \in \mathbb{N}$ .

Somit ist die Behauptung des Induktionsschrittes bewiesen.

Mit vollständiger Induktion folgt: Das  $N$ -dimensionale Induktionsprinzip gilt für alle  $N \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Nun sind die Voraussetzungen, die für diese Form des  $N$ -dimensionalen Induktionsprinzips nötig sind, sehr stark - die Aussage muß bereits für alle  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  bewiesen sein, für die eines der  $n_i$  gleich eins ist. Dies läßt sich häufig ebenso schwer zeigen wie die Aussage für alle  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  selbst. Deswegen folgt nun eine weitere Form des  $N$ -dimensionalen Induktionsprinzips mit für die Anwendung einfacher zu zeigenden Voraussetzungen, das wie die Folgerung im 2-dimensionalen Fall auf der bereits gezeigten Form des Induktionsprinzips aufbaut.

**Satz A.6** (N-dimensionales Induktionsprinzip, zweite Form)

Sei  $N \in \mathbb{N}$  fest. Für  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  sei  $A(n_1, \dots, n_N)$  eine Aussage über das  $N$ -Tupel natürlicher Zahlen  $(n_1, \dots, n_N)$ . Weiter gelte:

(i) Die Aussage  $A(1, \dots, 1)$  ist wahr.

(ii) Ist  $\mathcal{M} \subseteq \{1, \dots, N\}$  eine beliebige Teilmenge, so gilt mit der Umsortierung in der Schreibweise  $A(n_{m_1}, \dots, n_{m_{|\mathcal{M}|}}; n_{r_1}, \dots, n_{r_{N-|\mathcal{M}|}})$  mit  $m_i \in \mathcal{M}, r_i \in \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{M}$ :

Für alle  $n_{m_1}, \dots, n_{m_{|\mathcal{M}|}} \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn für jedes feste  $m \in \{m_1, \dots, m_{|\mathcal{M}|}\}$   $A(n_{m_1} + 1, \dots, n_{m-1} + 1, n_m, n_{m+1} + 1, \dots, n_{m_{|\mathcal{M}|}} + 1; 1, \dots, 1)$  wahr ist, dann ist auch  $A(n_{m_1} + 1, \dots, n_{m_{|\mathcal{M}|}} + 1; 1, \dots, 1)$  wahr.

Dann ist  $A(n_1, \dots, n_N)$  für jedes  $N$ -Tupel natürlicher Zahlen  $(n_1, \dots, n_N)$  wahr.

**Bemerkung A.7** Das Prinzip, dem die Voraussetzungen des Satzes A.6 folgen, läßt sich im 3-dimensionalen gut veranschaulichen: Stellt man sich den  $\mathbb{N}^3$  als den positiven Quadranten eines 3-dimensionalen Koordinatensystems vor, so stellt (i) sicher, daß die Aussage für den Ursprung erfüllt ist. (ii) stellt sukzessive sicher, dass sich daraus die Aussage für die drei Koordinatenachsen folgern läßt, ist dies gezeigt, so folgt daraus die Aussage für die drei begrenzenden Flächen des Systems und schließlich daraus auch für den ganzen  $\mathbb{N}^3$ . Für höhere Dimensionen gilt eine entsprechende sukzessive „Ausbreitung“ der Aussage.

**Beweis: des Satzes A.6:** Beweise diesen Satz durch vollständige Induktion nach  $K \in \mathbb{N}_0$ . Dabei sei  $B(K)$  für  $0 \leq K \leq N$  die Aussage:  $A(n_1, \dots, n_N)$  ist wahr für alle  $N$ -Tupel  $(n_1, \dots, n_N)$  mit  $|\mathcal{M}| = K$ ,  $\mathcal{M} \subseteq \{1, \dots, N\}$  und  $n_i = 1 \forall i \notin \mathcal{M}$ .

IA:  $K = 0$ :  $A(1, \dots, 1)$  und somit  $B(0)$  ist wahr nach Voraussetzung (i).

IV: Sei  $K \in \{0, \dots, N - 1\}$  und sei  $B(K)$  wahr.

IS: Sei nun  $\mathcal{M} \subseteq \{1, \dots, N\}$  und  $|\mathcal{M}| = K + 1$ . O.B.d.A.  $\mathcal{M} = \{1, \dots, K + 1\}$  (sonst sortiere zur einfacheren Schreibweise um). Dann gilt:

(1) Für jedes feste  $1 \leq m \leq K + 1$  ist

$A(n_1, \dots, n_{m-1}, 1, n_{m+1}, \dots, n_{K+1}, 1, \dots, 1)$  wahr für alle

$n_1, \dots, n_{m-1}, n_{m+1}, \dots, n_{K+1} \in \mathbb{N}$  nach IV, da  $|\mathcal{M} \setminus \{m\}| = K$ .

(2) Seien nun  $n_1, \dots, n_{K+1} \in \mathbb{N}$  und sei  $A(n_1 + 1, \dots, n_{m-1} + 1, n_m, n_{m+1} + 1, \dots, n_{K+1} + 1, 1, \dots, 1)$  wahr für jedes feste  $1 \leq m \leq K + 1$ . Dann ist nach (ii) auch  $A(n_1 + 1, \dots, n_{K+1} + 1, 1, \dots, 1)$  wahr.

Mit  $(K+1)$ -dimensionaler Induktion (Satz A.5) folgt:

$A(n_1, \dots, n_{K+1}, 1, \dots, 1)$  ist wahr für alle  $n_1, \dots, n_{K+1} \in \mathbb{N}$ . Also ist  $B(K + 1)$  wahr.

Mit vollständiger Induktion nach  $K$  folgt:  $B(K)$  ist wahr für alle  $0 \leq K \leq N$ , also ist  $A(n_1, \dots, n_N)$  wahr für alle  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Bemerkung A.8** *Natürlich gilt das  $N$ -dimensionale Induktionsprinzip genau wie das eindimensionale ebenso für  $n_1, n_2, \dots, n_N \in \mathbb{N}_0$  und läßt sich komplett analog beweisen. Für den Induktionsanfang muß dann überall „1“ durch „0“ ersetzt werden.*

# Anhang B

## Quellcode für die Simulation

Code für Fall 3.6:

```
%%%% Simulation der Kette %%%%
%Simulationskonstanten:
q=0.1; %q=0.5;
a=2; %a=4 %mu Gleichverteilung auf [a,b]
b=3; %b=5;
reset=1;
anfang=reset;
maxi=10000000; %Anzahl Iterationsschritte
durchlaeufer=10; %Anzahl der Durchläufe

%Initialisierung:
x=zeros(1, maxi);
x(1)=anfang;

for j=[1:durchlaeufer]
    %Kette aufbauen:
    for i=[2:maxi]
        if (rand < q)
            x(i)=reset;
        else
            mu=a+rand*(b-a);
            x(i)=x(i-1)*mu;
        end
    end
    %Daten speichern
    filename=['gleichv-q', num2str(q), '-a', num2str(a),
             '-b', num2str(b), '-', num2str(j), '.dat'];
    disp(['Saving data to file ', filename, ' for loop index j=',
         num2str(j)]);
    save(filename, 'x');
```

```

%generiere neuen Anfangspunkt für den nächsten Durchlauf
if (rand < q)
    x(1)=reset;
else
    mu=a+rand*(b-a);
    x(1)=x(maxi)*mu;
end
end

%%%% Auswertung %%%%
%Anzahl disjunkte Intervalle [reset*a^n,reset*b^n], n >=1
disjunkt=0;
for i=[1:50]
    if (b^i<a^(i+1))
        disjunkt=disjunkt+1;
    else break;
    end
end

%Konstanten für die Histogramme
genau=100;          %Genauigkeit Darstellung disjunkte Intervalle
genau2=10;         %Genauigkeit Darstellung nicht-disjunkte Int.
von=disjunkt+1;    %von a^von und
bis=7; %bis=10;    %bis b^bis berechne empirische Dichte

%Initialisierung
pistern=zeros(1,1);
bildbreite=anfang; %größter erreichter x-Wert
noben=0;           %größtes erreichtes Intervall

breite_g=(b^(von)-a^(von))/genau2;
anzahl=ceil((b^bis-a^von)/breite_g); %# berechn. nicht-disj. Int.
f=zeros(1, genau*disjunkt);          %Histogramm disjunkte Interv.
g=zeros(1, anzahl);                  %Histogramm nicht-disj. Int.

%Mittelpunktsberechnung für das Histogramm:
mittelpunkte_f=zeros(1, genau*disjunkt);
for n=[1:disjunkt]
    breite=(b^n-a^n)/genau;
    for i=[1:genau]
        mittelpunkte_f((n-1)*genau+i)=a^n+breite*(i-1)+breite/2;
    end
end
end

```

```

mittelpunkte_g=zeros(1,anzahl);
for i=[1:anzahl]
    mittelpunkte_g(i)=a^(von)+(i-1)*breite_g +breite_g/2;
end

%pi*([a^n,b^n]), n=0, 1, ...:
for j=[1:durchlaeufer]
    %Daten einlesen:
    filename=['gleichv-q', num2str(q),'-a', num2str(a),
             '-b', num2str(b), '-', num2str(j), '.dat'];
    disp(['Loading data from file ', filename, ' for loop
         index j=', num2str(j)]);
    load(filename, '-mat')
    %Aktualisierung:
    bildbr=max(x);
    bildbreite=max(bildbr,bildbreite);
    noben=floor(log(bildbreite)/log(b));
    %Berechnung pi*([reset*a^n,reset*b^n]), n=0,1,...:
    pi=zeros(1,noben);
    s=size(find(x==reset))/maxi;
    pi(1)=s(2);
    for i=[2:noben+1]
        s=(size(find(x>=a^(i-1)))-size(find(x>b^(i-1))))/maxi;
        pi(i)=s(2);
    end
    n1=length(pi);
    n2=length(pistern);
    n=max(n1,n2);
    pi=[pi,zeros(1,n-n1)];
    pistern=[pistern,zeros(1,n-n2)];
    pistern=pi+pistern;
end
%rechnerische untere Grenze:
u=zeros(1,noben);
for i=[1:noben+1]
    u(i)=q*(1-q)^(i-1);
end
%rechnerische obere Grenze:
o=zeros(1,noben);
for i=[1:noben+1]
    o(i)=(1-q)^(ceil((i-1)*log(a)/log(b)))
        -(1-q)^(floor((i-1)*log(b)/log(a))+1);
end

```

```

%f - Berechnung Histogramm disjunkte Invervalle:
for j=[1:durchlaeufer]
    %Daten einlesen:
    filename=['gleichv-q', num2str(q),'-a', num2str(a),
             '-b', num2str(b), '-', num2str(j), '.dat'];
    disp(['Loading data from file ', filename, ' for loop
          index j=', num2str(j)]);
    load(filename, '-mat')
    %Aktualisierung von f:
    fadd=zeros(1, genau*disjunkt);
    for n=[1:disjunkt]
        for i=[1:genau]
            breite=(b^n-a^n)/genau;
            s=(size(find(x>=a^(n)+breite*(i-1)))
              -size(find(x>=a^(n)+breite*i)))/(maxi*breite);
            fadd((n-1)*genau+i)=s(2);
        end
    end
    f=f+fadd;
end
f=f/durchlaeufer;

%g - Berechnung Histogramm nichtdisjunkter Teil:
for j=[1:durchlaeufer]
    %Daten einlesen:
    filename=['gleichv-q', num2str(q),'-a', num2str(a),
             '-b', num2str(b), '-', num2str(j), '.dat'];
    disp(['Loading data from file ', filename, ' for loop
          index j=', num2str(j)]);
    load(filename, '-mat')
    %Aktualisierung von g:
    gadd=zeros(1,anzahl);
    for i=[1:anzahl]
        s=(size(find(x>=a^(von)+(i-1)*breite_g))
          -size(find(x>=a^(von)+i*breite_g)))/(breite_g*maxi);
        gadd(i)=s(2);
    end
    g=g+gadd;
end
g=g/durchlaeufer;

%Berechnung empirische Zähl-dichte h insgesamt:

```

```

genau=1; %Genauigkeit und
lang=10000; %Breite der Darstellung
binrand=zeros(1,lang+1);
binrand(1)=1;
binrand(2)=1+10(-9); %Ränder und Mittelpunkte
for i=[3:lang+1]
    binrand(i)=1+(i-2)/genau;
end
binmitte=zeros(1,lang); %Intervalle für die Berechnung
for i=[1:lang]
    binmitte(i)=(binrand(i)+binrand(i+1))/2;
end
hist=zeros(1,lang+1);
h=zeros(1,lang+1);
for j=[1:durchlaeufer]
    %Daten einlesen:
    filename=['gleichv-q', num2str(q),'-a', num2str(a),
             '-b', num2str(b), '- ', num2str(j), '.dat'];
    disp(['Loading data from file ', filename, ' for loop
         index j=', num2str(j)]);
    load(filename, '-mat')
    %Berechnung einer Zähldichte aus den Simulationsdaten
    hist=genau*histc(x,binrand)/maxi;
    hist(1)=109*hist(1)/genau; %Berücksichtigung 2. Grenze
    hist(2)=hist(2)/(1-10(-8));
    h=h+hist;
end
h=h/durchlaeufer;

%%%%% Darstellung %%%%%
%Darstellung pi*([an,bn]) mit beiden rechnerischen Grenzen:
hold on; %n gegenüber log10 pi*([an,bn]):
plot([0:noben-1],log10(pistern(1:noben)), 'o');
plot([0:noben-1],log10(u(1:noben)));
plot([0:noben-1],log10(o(1:noben)));

%Darstellung Histogramm disjunkte Intervalle:
for n=[1:disjunkt]
    h=figure;
    bar(mittelpunkte_f([(n-1)*genau+1:n*genau]),
        f([(n-1)*genau+1:n*genau]), 1);
    xlabel('x', 'FontSize', 16);
    ylabel('f(x)', 'FontSize', 16); colormap autumn;
end

```

```

    myaxes=get(h, 'Children');
    set(myaxes, 'FontSize', 13);
end

%Darstellung Histogramm nicht-disjunkter Teil:
h=figure;
bar(mittelpunkte_g, g, 1);
xlabel('x','FontSize',16);
ylabel('f(x)','FontSize',16); colormap autumn;
myaxes=get(h, 'Children');
set(myaxes, 'FontSize', 13);

%log-log-Plot der empirischen Dichte
fig=figure;
loglog(binmitte(2:lang),h(2:lang),'Color','black');
xlabel('x', 'FontSize',16);ylabel('f(x)','FontSize',16);
myaxes=get(fig, 'Children');
set(myaxes, 'FontSize', 13);

```

# Anhang C

## Symbolverzeichnis

### Zahlbereiche

$\mathbb{N}$  die natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  die natürlichen Zahlen mit der 0

$\mathbb{Z}$  die ganzen Zahlen

$\mathbb{R}$  die reellen Zahlen

$\mathbb{R}^{>0} = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  die positiven reellen Zahlen

$\emptyset$  die leere Menge

### Bezeichnungen bei Zahlen

ggT größter gemeinsamer Teiler

$\lfloor a \rfloor$  untere Gaußklammer von  $a$ , die größte ganze Zahl kleiner-gleich  $a$

$\lceil a \rceil$  obere Gaußklammer von  $a$ , die kleinste ganze Zahl größer-gleich  $a$

$[x]^+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  Positivteil von  $x$

$x_n \uparrow x$  Limes  $x_n \rightarrow x, x_n < x$

$x_n \downarrow x$  Limes  $x_n \rightarrow x, x_n > x$

### Bezeichnungen bei Mengen

$A^C$  Komplement von  $A$

$A_n \uparrow A$   $A_1, A_2, \dots$  sind Mengen mit  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  und  $A = \bigcup A_n$

$A_n \downarrow A$   $A_1, A_2, \dots$  sind Mengen mit  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  und  $A = \bigcap A_n$

### Indikatorsymbole

$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$  Indikatorfunktion für eine Menge  $A$

$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$  Dirac-Maß für einen Wert  $x$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$  Kroneckersymbol

### Bezeichnungen bei homogenen Markovketten mit diskretem Zustandsraum

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  zugrunde liegender Wahrscheinlichkeitsraum

$S$  abzählbarer Zustandsraum

$\mathcal{J}$  Potenzmenge von  $S$

$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  homogene Markovkette mit Zustandsraum  $S$

$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$  Übergangswahrscheinlichkeit von  $i$  nach  $j$

$\mathbf{P} = (p_{ij})$  Übergangsmatrix

$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$   $n$ -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit von  $i$  nach  $j$

$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i)$  Wahrscheinlichkeit, bei Start in  $i$  den Zustand  $j$  zum ersten Mal zum Zeitpunkt  $n$  zu besuchen

$$[f_{ij}^{(0)} := 0]$$

$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$  Wahrscheinlichkeit, bei Start in  $i$  je nach  $j$  zu gelangen

$B_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}$  Zahl der Besuche in  $j$  zu Zeitpunkten  $n \geq 1$

$p_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{\{X_n=j\}} | X_0 = i] = E[B_j | X_0 = i]$  erwartete Zahl der Besuche in  $j$  bei Start in  $i$

$i \rightsquigarrow j [n] \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)} > 0$   $i$  führt in  $n$  Schritten zu  $j$

$i \rightsquigarrow j \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : i \rightsquigarrow j [n]$   $i$  führt zu  $j$

$d_i = ggT\{n \geq 1 : i \rightsquigarrow i[n]\}$  Periode von  $i$

$\rho = \rho P$  (eindeutig bestimmtes) invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß

### Bezeichnungen bei homogenen Markovketten mit stetigem Zustandsraum

$X$  beliebige Menge (Zustandsraum)

$x, y, z$  Elemente in  $X$

$\mathcal{B}(X)$  separable  $\sigma$ -Algebra auf  $X$

$A, B, C$  Mengen in  $\mathcal{B}(X)$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{>0})$  Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^{>0}$

$\Omega = X^\infty = \prod_{i=0}^{\infty} X_i, X_i = X \forall i$

$\mathcal{F} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}(X_i), X_i = X \forall i$

$\mathcal{M}^+(X \times X, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X))$  Menge der nicht-negativen meßbaren numerischen Funktionen  $f : (X \times X, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})})$

$\Phi = \{\Phi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  (Zeit-)homogene Markovkette auf  $\Omega$

$P(x, A)$  Übergangskern

$P^n(x, A)$   $n$ -Schritt Übergangskern

$T(x, A)$  substochastischer Kern

$\eta_A := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\Phi_n = A\}}$ , Aufenthaltszeit, d.h. Anzahl der Besuche von  $\Phi$  auf  $A$

nach dem Zeitpunkt 0

$\tau_A := \min\{n \geq 1 : \Phi_n \in A\}$  erste Rückkehrzeit von  $\Phi$  auf  $A$

$L(x, A) := P_x(\tau_A < \infty) = P_x(\Phi \text{ besucht jemals } A)$  Rückkehrwahrscheinlichkeit von  $\Phi$  auf  $A$

${}_A P^n(x, B) := P_x(\Phi_n \in B, \tau_A \geq n)$ ,  $n$ -Schritt Tabu-Wahrscheinlichkeiten

$\psi \succ \varphi$   $\psi$  dominiert  $\varphi$ , d.h. sind  $\psi$  und  $\varphi$  Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathcal{B}(X)$  und ist  $\psi(A) = 0$  für ein  $A \in \mathcal{B}(X)$ , so folgt  $\varphi(A) = 0$ .

$\varphi$  Irreduzibilitätsmaß

$\psi$  maximales Irreduzibilitätsmaß

$\mathcal{B}^+(X) = \{A \in \mathcal{B}(X) : \psi(A) > 0\}$  für eine  $\psi$ -irreduzible Markovkette

$\Phi_a$  Sample-Kette für ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $a$  auf  $\mathbb{N}_0$  mit Übergangskern

$K_a(x, A) := \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)a(n)$

$d$  Periode von  $\Phi$

$\pi(A) = \int_X P(x, A) d\pi(x)$   $\sigma$ -endliches invariantes Maß

$\pi^*(A)$  invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß

$\|\mu\| = \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A) - \inf_{A \in \mathcal{B}(X)} \mu(A)$  totale Variationsnorm für ein signiertes Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(X)$

# Literaturverzeichnis

- [1] Heinz Bauer: *Maß- und Integrationstheorie (2. Auflage)*. Walter de Gruyter, Berlin 1992.
- [2] Heinz Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie (3. Auflage)*. Walter de Gruyter, Berlin 1978.
- [3] Richard Durrett: *Essentials of Stochastic Processes*. Springer-Verlag, New York 1999.
- [4] Jürgen Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag, Berlin 1999.
- [5] Hubertus Th. Jongen und Paul Günter Schmidt: *Analysis, Skript zur Vorlesung*. Aachener Beiträge zur Mathematik, Aachen 1996.
- [6] Samuel Karlin: *A First Course in Stochastic Processes (Second Printing)*. Academic Press, New York 1968.
- [7] Samuel Karlin and Howard M. Taylor: *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York 1981.
- [8] Ulrich Krengel: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (7. Auflage)*. Vieweg, Wiesbaden 2003.
- [9] Susanna C. Manrubia, Damián H. Zanette, May 1999: Stochastic Multiplicative Processes with Reset Events. *Physical Review E* **59** 5, 4945-4948.
- [10] S.P.Meyn and R.L.Tweedie: *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag, London 1993.
- [11] Pranab K. Sen and Julio M. Singer: *Large Sample Methods in Statistics (Reprint)*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2000.
- [12] Dirk Werner: *Funktionalanalysis (3. Auflage)*. Springer-Verlag, Berlin 2000.

Ich versichere, daß ich diese Diplomarbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtliche oder sinngemäße Wiedergaben aus anderen Quellen sind kenntlich gemacht und durch Zitate belegt.

Aachen, 27. Juli 2004